Baccalauréat TL Métropole juin 1999

EXERCICE 1 — 4 points

Dans cet exercice, on donnera chaque résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Une urne contient quatre boules blanches et cinq boules noires. Ces boules étant indiscernables au toucher, on conviendra que tous les tirages possibles d'une boule sont équiprobables.

1. On tire simultanément deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire une boule et on la remet dans l'urne, puis on effectue un second tirage d'une boule.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir d'abord une noire, puis une blanche ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement une boule de chaque couleur ?
3. On tire une boule et on note sa couleur. Si elle est noire on la remet dans l'urne, sinon on ne la remet pas. Dans les deux cas, on effectue un second tirage d'une boule.
   Quelle est la probabilité de tirer une boule de chaque couleur ?

EXERCICE 2 — 5 points

1. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^2 + 9x - 4\,140.$$

   a. Calculer $P(60)$.
   b. Résoudre $P(x) = 0$ et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction de x.
   c. Dresser le tableau de variations de P.

2. On dispose d'une subvention de 414 000 F pour atteindre dans un désert une nappe d'eau souterraine. Le coût du forage est fixé à 1 000 F pour le premier mètre creusé, 1 200 F pour le deuxième, 1 400 F pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 F par mètre creusé.
   On désigne par u_n le coût en francs du du n-ième mètre creusé ($n \in \mathbb{N}*$).
   a. Déterminer u_5. Préciser la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n.
   b. Pour tout entier non nul n, on désigne par S_n le coût total en francs d'un puits de n mètres (par exemple, le coût total d'un puits de 3 mètres est $1\,000 + 1\,200 + 1\,400 = 3\,600$).
   Montrer que le coût total d'un puits de n mètres est $100n^2 + 900n$.
   c. À l'aide de la question 1., indiquer la profondeur maximale du forage que l'on peut réaliser.

PROBLÈME 11 points

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x} - x.$$

Le but du problème est d'étudier la fonction f puis d'encadrer une intégrale.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \mathrm{e}^x$.

1. Calculer la dérivée de g et étudier les variations de g. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et justifier l'encadrement $-0,57 < \alpha < -0,56$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B - Étude de la fonction *f* et de la courbe $\mathscr{C}$

1. Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, déterminer la limite de f en $+\infty$. On admettra que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$. Déduire de la **partie A** le sens de variation de f.
3. En utilisant la question 2. de la **partie A**, montrer que $f(\alpha) = -1 - \dfrac{1}{\alpha} - \alpha$.
4. Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D et préciser les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Montrer qu'il existe un point A de $\mathscr{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à D.

   Déterminer l'équation de cette tangente que l'on appellera T.
6. Construire sur le graphique ci-dessous les droites D et T.
7. En observant la représentation graphique, indiquer quelles semblent être les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = -x + m$, d'inconnue x, admet une solution unique.

Partie C - Étude d'une intégrale

On pose $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une interprétation graphique, justifier l'encadrement $1 < \mathrm{J} < 2$.
2. **a.** Calculer la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   c. Calculer la valeur exacte de J.