∽ Baccalauréat L Métropole juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Lors d'une fête foraine, une loterie est organisée toutes les heures. À chaque fois, trente billets sont vendus parmi lesquels dix sont gagnants (on admet que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés).
On donnera pour chaque résultat la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième.

1. Luc achète un billet. Quelle est la probabilité que ce billet soit gagnant ?
2. Marc participe à trois loteries consécutives pour lesquelles il prend à chaque fois un billet (on admet que les loteries sont indépendantes).
   Quelle est la probabilité que Marc ait au moins un billet gagnant ?
3. Pierre participe à une loterie, il achète simultanément trois billets.
   a. Quelle est la probabilité que Pierre n'ait pas de billet gagnant ?
   b. Quelle est la probabilité que Pierre ait au moins un billet gagnant ?
4. Qui de Pierre ou de Marc a le plus de chances d'avoir au moins un billet gagnant ?
5. La publicité annonce « *Un billet sur trois est gagnant ! Achetez trois billets !* »
   Ce texte suggère que, en achetant trois billets, on est sûr de gagner.
   Que pensez-vous de l'énoncé de la publicité ?

Exercice 2 **5 points**

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -\dfrac{3}{2}\\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n - 1\end{array}\right.$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose $v_n = u_n + 3$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.
3. Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
   Exprimer s_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la feuille annexe représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-2x} - 4\text{e}^{-x} - 2x + 4.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra factoriser e^{-x} et utiliser la propriété $\lim\limits_{x\to-\infty} x\text{e}^{x} = 0$).
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Soit la droite Δ d'équation $y = -2x + 4$. Tracer la droite Δ sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, et montrer que Δ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

c. Calculer les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ.

Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ.

3. Montrer que $f'(x) = -2\left(\text{e}^{-x} - 1\right)^2$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[1 ; 2]$ une unique solution α.

Soit K le point de la courbe qui a pour abscisse α ; placer ce point sur la figure.

5. **a.** Déterminer une équation de la tangente D au point B d'abscisse 0.

b. Déterminer les coordonnées du point E de $\mathcal{C}$ où la tangente D′ à la courbe est parallèle à la droite Δ.

c. Placer les points B et E sur la feuille annexe et construire les droites D et D′.

6. Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = -2x + 4 - f(x).$$

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{0} g(x)\,\text{d}x$. Donner une interprétation graphique de ce résultat en illustrant la réponse à l'aide de la feuille annexe.

Feuille annexe à rendre avec la feuille

Problème : courbe représentative de la fonction f.