Baccalauréat L Métropole septembre 2001

Durée de l'épreuve : 3 heures | Coefficient : 4

Une feuille de papier millimétré, qui sera utilisée dans le problème, est remise au candidat avec le sujet.
L'usage des calculatrices est autorisé.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} u+\dfrac{1}{2}v & = & 0\\ u-\dfrac{1}{4}v & = & \dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ (u et v réels).
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a\mathrm{e}^x + \frac{b}{\mathrm{e}^x+1} \quad (a \quad \text{et} \quad b \quad \text{réels}).$$

   Trouver les valeurs des réels a et b, sachant que la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ passe par O et que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la droite Δ d'équation $y = \dfrac{3}{2}x - 2$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{2}{\mathrm{e}^x+1}.$$

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geqslant 1$.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans cet exercice, les questions 1, 2 et 3 *sont indépendantes.*
Une urne A contient trois pièces de monnaie en cuivre et deux pièces en argent. Une urne B contient quatre pièces de monnaie en cuivre et une pièce en argent. On considère que dans chaque urne, toutes les pièces étant indiscernables au toucher, chaque pièce a la même probabilité d'être tirée.

1. On enlève une pièce de l'urne A et une pièce de B. Quelle est la probabilité pour que, à l'issue de ces deux opérations, les deux urnes aient la même composition ?
2. Les urnes ont la composition donnée au début de l'exercice.
   On tire simultanément trois pièces de l'urne A ; ces pièces sont ensuite placées dans B. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pièces en cuivre contenues dans B à l'issue de ces opérations.

   a. Montrer que la valeur minimale prise par X est 5.

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Les urnes ont à nouveau la composition donnée au début de l'exercice. On tire une pièce de A, que l'on place dans B, puis on enlève une pièce de B. Quelle est la probabilité pour que l'urne B ne contienne que des pièces en cuivre à l'issue de ces opérations ?

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

On considère la fonction f définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2x + \ln(x-1) - \ln x.$$

Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Partie A : étude de la fonction f et de la courbe $\mathscr{C}$

1. Montrer que $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x(x-1)}$ et en déduire le sens de variations de f sur $]1~;~+\infty[$.
2. **a.** Calculer la limite de f en 1.

   b. Vérifier que $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5. Montrer que, sur l'intervalle $[2~;~3]$, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée de α au centième près.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ sur une feuille de papier millimétré (on prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
7. **a.** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ est une primitive de f sur $]1~;~+\infty[$.

   b. En déduire l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de terme général $u_n = f(n) - 2n$ (n entier naturel supérieur ou égal à 2).

1. Étudier le signe de u_n en fonction de n.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $S_n = u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.
3. **a.** Montrer que $S_n = \ln\dfrac{1}{n}$.

   b. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$.