∽ Baccalauréat L spécialité Métropole ∾ septembre 2007

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

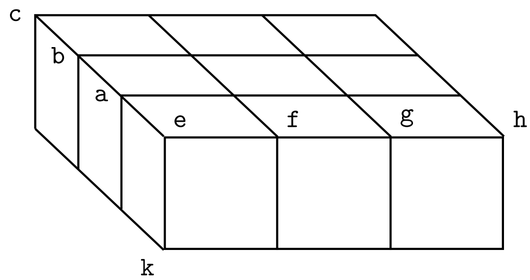
Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **5 points**

Dans tout l'exercice on utilisera une lettre majuscule pour noter un point de l'espace et une lettre minuscule pour noter une représentation plane de ce point. Par exemple : a représente le point A.

Les dessins donnés dans les annexes 1 et 1 bis sont à compléter et à rendre avec la copie. Aucune justification n'est attendue dans les constructions mais on laissera apparents les traits de construction.

Le dessin ci-dessous est une représentation en perspective centrale de neuf cubes ayant tous les mêmes dimensions. Les points e, a, b, c, f, g, h et k représentent les sommets E, A, B, C, F, G, H et K.



Ces neuf cubes sont sur un plan horizontal. Dans cette représentation le plan de projection est tel que le plan KEH est un plan frontal.

1. Dans le dessin N° 1 donné en annexe 1 , les points e, a, f et k représentent les points E, A, F et K dans une perspective parallèle.

   Compléter ce dessin N° 1 par la représentation en perspective parallèle des neuf cubes.

2. Dans le dessin N°2 donné en annexe 1, les points e, a, f et k représentent les points E, A, F et K dans une perspective centrale.

   La droite δ est la ligne d'horizon, w le point de fuite de la droite (EA) et w′ le point de fuite de la droite (EF). On sait de plus que (EK) et (AF) sont situées dans des plans frontaux.

   Compléter ce dessin N°2 par la représentation en perspective centrale des neuf cubes.

3. Dans le dessin N°3 donné en annexe 1 bis , les points e, a, f et k sont des représentations des points E, A, F et K.

   Sur ce dessin sont représentés une droite δ et deux points v et v′ de cette droite.

   Les points b et c sont construits sur le segment [ev] de sorte que les distances ea, ab et bc soient les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,6.

   Les points f, g et h placés sur le segment [ev′] sont tels que ef = ea, eg = eb et eh = ec.

   a. Calculer ab et bc.

   b. Compléter le dessin N°3 par le tracé des droites (vf), (vg), (vh), (v′a), (v′b), (v′c).

   En partant d'observations graphiques, montrer que le quadrillage obtenu ne représente pas, en perspective centrale, la face supérieure des neuf cubes.

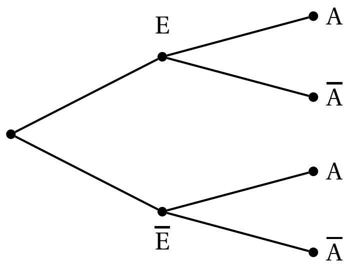
EXERCICE 2 **3 points**

Dans ce QCM, il s'agit de recopier sur la copie chacune des trois affirmations proposées en la complétant par la réponse choisie.
Un seul choix est correct. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste vaut un point, une réponse fausse enlève un quart de point, l'absence de réponse est notée 0. *Si le total des points obtenus sur cet exercice est négatif ou nul, la note zéro est attribuée à l'exercice.*

L'arbre suivant représente les données d'un exercice de probabilité. La probabilité d'un évènement H est notée $P(\text{H})$.

On sait que $P(\text{E}) = 0,3$; $P_{\text{E}}(\text{A}) = 0,1$ et $P(\overline{\text{E}} \cap A) = 0,14$.



1. La probabilité de $\text{E} \cap \text{A}$ est égale à :
   a. 0,4 **b.** 0,03 **c.** 0,33 **d.** 0,1.
2. La probabilité de A sachant $\overline{\text{E}}$ est égaie à :
   a. 0,7 **b.** 0,14 **c.** 0,2 **d.** 1,1.
3. La probabilité de A est égale à :
   a. 0,42 **b.** 0,3 **c.** 0,042 **d.** 0,17.

EXERCICE 3 **6 points**

Une entreprise de recyclage récupère un lot de digicodes ayant tous un clavier identique à celui représenté ci-contre.
Chacun de ces digicodes a été programmé pour fonctionner avec **un code** constitué de deux signes choisis parmi les douze figurant sur ce clavier.
Par exemple A0, BB, 43 sont des codes possibles.
Pour remettre en état de fonctionnement un tel digicode, il faut retrouver **son code**.

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	A	B

Pour faciliter une telle recherche, a été inscrit sur le boîtier de chaque digicode un nombre R qui dépend du code. Ce nombre a été obtenu de la manière suivante :

- Le code est considéré comme un nombre écrit en base 12. A est le chiffre dix et B le chiffre 11.
- Le nombre R inscrit sur le boîtier est le reste de la division euclidienne du code, converti en base 10, par 53. R est donc un nombre écrit en base 10 et tel que $0 \leqslant \text{R} \leqslant 53$.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. On suppose que le code d'un digicode est AB.
   a. Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 est $(\text{AB})_{\text{douze}}$.

b. Déterminer le nombre R inscrit sur le boîtier de ce digicode.

3. Sur le boîtier d'un digicode est inscrit le nombre R égal à 25. Démontrer que $(21)_{\text{douze}}$ peut être le code de ce digicode.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	R un entier naturel.
Initialisation :	L liste vide ; $n = 0$.
Traitement :	Tant que $53n + \text{R} \leqslant 143$, mettre dans la liste L la valeur de $53n+$ R puis ajouter 1 à n.
Sortie :	Afficher la liste L.

a. Faire fonctionner cet algorithme pour R = 25.

b. On suppose que le nombre R inscrit sur le boîtier d'un digicode est R 25. Quels sont les trois codes possibles de ce digicode ?

5. Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Si l'affirmation est considérée comme étant fausse, en apporter la preuve.

Affirmation : quelle que soit la valeur de R l'algorithme permet de trouver trois codes parmi lesquels se trouve le code secret.

EXERCICE 4 — 6 points

Des pucerons envahissent une roseraie. Des coccinelles, prédateurs des pucerons, sont introduites dans cette roseraie. Au bout de vingt jours, on constate que le nombre des pucerons peut être estimé à 770, soit 0,77 milliers.
On s'intéresse à l'évolution du nombre des pucerons (exprimé en milliers) présents dans la roseraie en fonction de la durée écoulée depuis l'introduction des coccinelles. On note f cette fonction et t cette durée. L'unité de durée est un jour. Lorsque l'on introduit les coccinelles, on a donc $t = 0$.

1. Des études ont montré que le nombre des pucerons (exprimé en milliers) en fonction de la durée t écoulée depuis l'introduction des coccinelles, était modélisé par la fonction f définie, pour tout nombre réel t élément de $[0\,;20]$, par :

$$f(t) = (2t+2)\text{e}^{-kt},\ \text{où } k \text{ est un nombre réel positif constant.}$$

a. Quel est le nombre de pucerons au moment où les coccinelles sont introduites dans cette roseraie ?

b. Déterminer la valeur exacte de k puis l'une de ses valeurs approchées au millième près.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que la fonction f définie pour tout nombre réel t élément de $[0\,;\,20]$ par $f(t) = (2t+2\text{e}^{-0,2t}$, représente correctement l'évolution du nombre des pucerons en fonction de la durée t. On note f' la fonction dérivée de f et $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,20]$,
$f'(t) = (-0,4t+1,6)\text{e}^{-0,2t}$.

b. Combien de jours après, l'introduction des prédateurs le nombre des pucerons va-t-il commencer à diminuer ?

c. Calculer $f'(0)$. Utiliser ce nombre dérivé pour calculer, sans utiliser de calculatrice, une approximation du nombre des pucerons présents dans la roseraie au bout d'un jour.

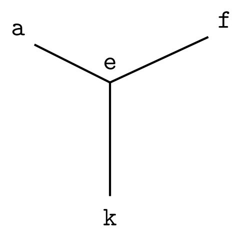
3. Le graphique donné en annexe 2 est un dessin de $(\mathscr{C}_f)$. **Ce graphique est à compléter et à rendre avec la copie.**

   a. à l'aide des informations données ou obtenues précédemment, placer les unités du repère.

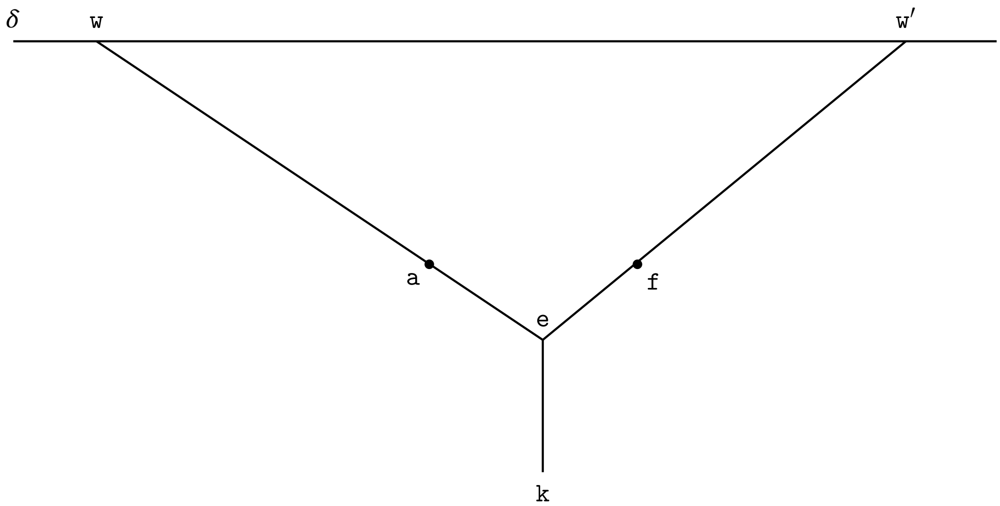
   b. On estime que les pucerons ne posent plus de problème dès que leur nombre est devenu inférieur à 1 000. Lire graphiquement au bout de combien de jours ce seuil sera atteint.
   Laisser apparents les trails de construction utilisés pour cette lecture.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

Dessin N^{o} 1 exercice 1

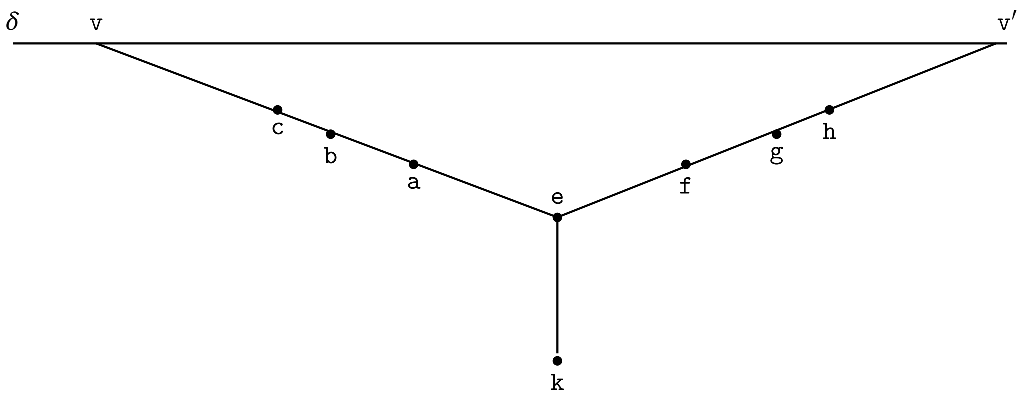


Dessin N^{o} 2 exercice 1



ANNEXE 1 bis (à rendre avec la copie)

Dessin N° 3 exercice 1



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Courbe de l'exercice 4