Baccalauréat L Nouvelle-Calédonie novembre 2004

Épreuve facultative novembre 2004

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

Le candidat doit traiter les deux premiers exercices et soit l'exercice 3, soit l'exercice 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE — 7 points

Rappels :
- La fonction exponentielle se note indifféremment $(x \mapsto \exp(x))$ ou $(x \mapsto \text{e}^x)$.
- Si a et b sont des constantes réelles la fonction dérivée de $\left(x \mapsto \text{e}^{ax+b}\right)$ est : $\left(x \mapsto a\text{e}^{ax+b}\right)$.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I = [1 900 ; 2 100] par :

$$f(x) = \text{e}^{0,004x-5}.$$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée.

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies au dixième.

x	1 900	1 950	2 000	2 050	2 100
$f(x)$					

2. Calculer, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, le nombre $f'(x)$.
   En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.
3. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné en annexe 1.

Partie B

On considère que, pour tout entier naturel n appartenant à l'intervalle I, le nombre $f(n)$ donne la population d'une ville V, exprimée en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année n.

1. **a.** Déterminer graphiquement la population de la ville V au 1er janvier 1990.
   (On fera apparaître les constructions nécessaires sur le graphique de l'annexe 1 et on donnera une réponse arrondie à la centaine de milliers d'habitants).

   b. Déterminer par le calcul la population de la ville V au 1er janvier 1990.
   (On arrondira le résultat à la dizaine de milliers d'habitants.)
2. On cherche à déterminer à partir du 1er janvier de quelle année la population de la ville V dépassera les 2 600 000 habitants,

   a. Déterminer graphiquement un encadrement de cette année.
   (On fera apparaître les constructions nécessaires sur le graphique de l'annexe 1.)

   b. Déterminer cette année par le calcul.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE — 7 points

Le but de cet exercice est de construire un carré d'aire égale à l'aire d'un rectangle donné.

Partie A : Étude d'un exemple

La figure 1 de l'annexe 2 représente dans un repère orthonormal d'origine O, les points A, B et C de coordonnées respectives $(0\,;3)$, $(-5\,;\,3)$ et $(-5\,;\,0)$ et le rectangle OABC.
L'unité graphique est le centimètre.
Le cercle de centre O passant par A, coupe l'axe des abscisses en deux points.
On note E celui de ces points dont l'abscisse est positive et M le milieu du segment [CE].
Le cercle de diamètre [CE] coupe l'axe des ordonnées en deux points.
On note F celui de ces points dont l'ordonnée est négative.

1. Construire E, M et F sur la figure 1. Donner les coordonnées de M.
2. Calculer la valeur exacte de la distance OF.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, du rectangle OABC et vérifier que :
   $\mathscr{A} = \text{OF}^2$.
4. Construire sur la figure 1 un carré d'aire égale à celle du rectangle OABC.

Partie B : Cas général
La figure 2 de l'annexe 2 représente un rectangle quelconque OABC de largeur OA et de longueur AB. On note $a = \text{OA}$ et $b = \text{AB}$. On a donc : $b \geqslant a$. L'unité graphique est le centimètre.
On ne cherchera pas à mesurer a et b qui peuvent prendre toutes valeurs positives vérifiant $b \geqslant a$.

1. Construire sur la figure 2, en utilisant uniquement le compas et la règle non graduée, les points suivants (on laissera apparents les traits de construction) :
   a. le point E de la droite (CO) qui vérifie OE = a et n'appartient pas au segment [CO].
   b. le point M milieu du segment [CE].
   c. le point F, point d'intersection du cercle de diamètre [CE] et de la droite (AO) qui vérifie : O est entre A et E.
2. Montrer que CE = $a + b$. En déduire ME puis montrer que MO $= \dfrac{b-a}{2}$.
3. Préciser la valeur de la distance MF puis montrer que : OF $= \sqrt{ab}$.
4. Construire sur la figure 2 un carré de côté [OF].
   Vérifier que ce carré et le rectangle OABC ont la même aire.

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

EXERCICE 3 **6 points**

Tous les ouvrages publiés sont identifiés par un numéro ISBN (International Standard Book Number) qui indique la langue de publication, l'éditeur et la référence de l'ouvrage chez cet éditeur. Un numéro ISBN est constitué de neuf chiffres (c'est-à-dire neuf entiers compris entre 0 et 9) suivis d'un espace et d'une clé. Cette clé est un chiffre ou la lettre X (le 10 en numération romaine).
Pour déterminer la clé d'un numéro ISBN dont les neuf premiers chiffres sont $abcdefghi$, on calcule le nombre $N = a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + 8h + 9i$, puis on détermine le nombre r compris entre 0 et 10 qui est congru à N modulo 11. Si le nombre r est strictement inférieur à 10, la clé est égale à r ; si le nombre r est égal à 10, la clé est X.

1. Vérifier que la clé du numéro ISBN 190190340 0 est correcte.
2. Calculer la clé du numéro ISBN dont les 9 premiers chiffres sont : 103241052.

3. Le quatrième chiffre du numéro ISBN d'un ouvrage est illisible. On le note d. La clé de ce numéro est 4 et le numéro se présente ainsi : $329d12560\ 4$.
   a. Montrer que : $4d \equiv 2 \quad (\text{modulo } 11)$.
   b. En déduire le chiffre d.
4. Le premier chiffre et le neuvième chiffre du numéro ISBN d'un autre ouvrage sont illisibles. On les note a et i. La clé de ce numéro est 9 et le numéro se présente ainsi : $a3210050i\ 9$.
   a. Montrer que $a \equiv 2 - 9i \quad (\text{modulo } 11)$.
   b. Donner deux valeurs possibles du couple $(a\ ;\ i)$.

Votre choix : Exercice 3 ou exercice 4. Indiquer clairement votre choix sur la copie.

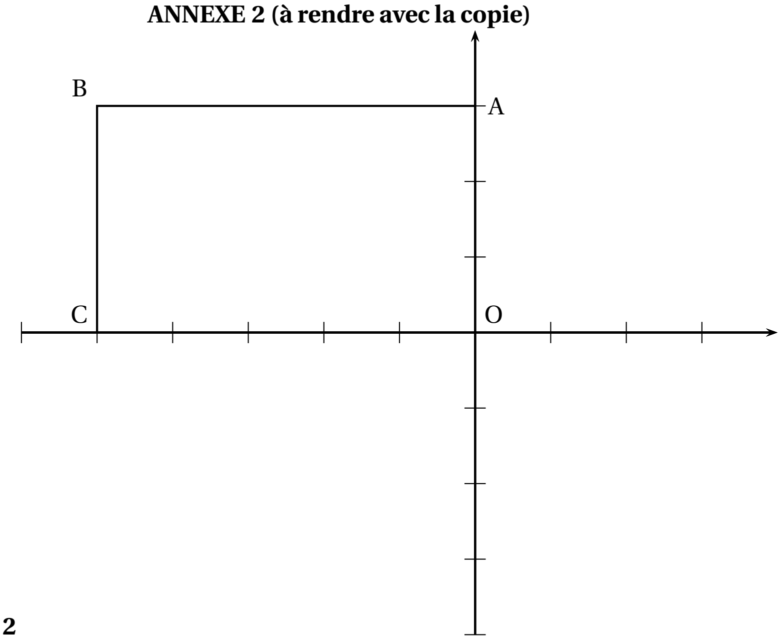
EXERCICE 4 **6 points**

Rappels
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire d'un évènement A, $p(A)$ la probabilité d'un évènement A,
« A et B » ou « $A \cap B$ » l'intersection de deux évènements A et B,
« A ou B » ou « $A \cup B$ » la réunion de deux évènements A et B.
On note $p_B(A)$ la probabilité qu'un évènement A se réalise, sachant qu'un évènement B (de probabilité non nulle) est déjà réalisé. On a : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A \text{ et } B)}{p(B)}$.
Dans un pays européen, 12 % des moutons sont atteints par une maladie.
Un test de dépistage de cette maladie vient d'être mis sur le marché mais il n'est pas totalement fiable.
Une étude a montré que quand le mouton est malade le test est positif dans 93 % des cas ; quand le mouton est sain, le test est négatif dans 97 % des cas.
On choisit un le mouton au hasard et on le soumet au test de dépistage de la maladie.
On note M l'évènement « le mouton est malade ».
On note Po l'évènement « le test est positif ».

1. Compléter l'arbre de probabilité donné en annexe 3.
2. Calculer les probabilités des évènements A, B, C suivants :
   A : « Le mouton est malade et le test est positif ».
   B : « Le mouton est sain et le test est positif ».
   C : « Le mouton est malade et le test est négatif ».
3. En déduire que la probabilité de l'évènement Po est égale 0,138.
   Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
4. Dans cette question les résultats seront arrondis au millième.
   a. Sachant qu'un mouton a un test positif, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas malade ?
   b. Sachant qu'un mouton a un test négatif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

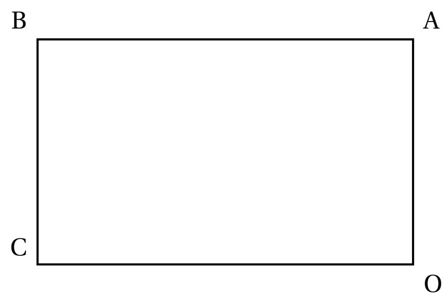
ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)
Exercice 1, questions A. 3., B. 1. a. et B.2. a.

ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)



Exercice 2

Figure 2



ANNEXE 3 (à rendre avec la copie si vous avez choisi l'exercice 4)
Exercice 4, question 1.