∾ Baccalauréat L Polynésie juin 2006 ∾

L'usage d'une calculatrice est autorisée 3 heures

EXERCICE 1 **6 points**

Un jeu consiste à jeter un dé de forme tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Ce dé est pipé de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face.
On note p_i la probabilité d'obtenir le nombre i pour $i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

1. Exprimer p_i en fonction de i puis vérifier que la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{5}$.

2. On jette le dé. Si le nombre obtenu est pair, la somme reçue par le joueur est égale à sa mise augmentée de 10 %. Si le nombre obtenu est impair, le joueur reçoit sa mise diminuée de 11 euros. La mise minimale est de 20 euros.

Un joueur décide de faire trois parties successives :
— il mise cent euros pour la première partie ;
— pour la seconde partie il mise la somme reçue à l'issue de la première partie ;
— pour la troisième partie il mise la somme reçue à l'issue de la seconde partie.

a. Montrer que, pour ce joueur, les montants possibles de la somme reçue à l'issue des trois parties sont, arrondies â un euro près, 133 euros, 110 euros, 109 euros, 108 euros, 88 euros, 87 euros, 86 euros et 67 euros.

b. Montrer que la probabilité de gagner 110 euros est égale à $\frac{18}{125}$.

c. Calculer la probabilité de chacun des quatre évènements qui conduisent à une perte.

d. Montrer que la probabilité, pour ce joueur, de gagner de l'argent est supérieure à celle d'en perdre.

Indication : pour la question 2*, on pourra s'aider d'un arbre.*

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.

2. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
Pour la limite en $+\infty$ on pourra remarquer que pour x non nul $f(x)$ peut s'écrire : $x^2\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right)$.

2. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de f.

3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

a. Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.

b. Montrer que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et qu'elle appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.

c. En utilisant une calculatrice pour calculer $f(x)$ pour différentes valeurs de x, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.
Justifier la valeur retenue.

EXERCICE 3 **5 points**

La reine Cléopâtre ordonna à son architecte, le célèbre Numérobis, de réaliser une pyramide régulière à base carrée dont les dimensions devaient être telles que le carré de la hauteur soit égal à l'aire de chaque face triangulaire de cette pyramide

1. Compléter le dessin donné en annexe, représentant la pyramide en perspective cavalière ; L est le centre du carré AOUT, I est le sommet de la pyramide, J le milieu du segment [OU].
On pose $\text{OJ} = r$; $\text{IL} = h$ et $t = \dfrac{\text{IJ}}{\text{JL}}$.

2. Calculer :

a. La longueur JL en fonction de r.

b. La longueur IJ en fonction de r et de h.

c. En déduire la valeur de t en fonction de r et h.

d. L'aire du triangle OUI en fonction de r et h.

3. Montrer que l'exigence de Cléopâtre se traduit par la relation :

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \qquad (1)$$

4. a. Calculer $t^2 - 1$.

b. En déduire qu'alors l'égalité (1) peut s'écrire : $t^2 - t - 1 = 0 \quad (2)$.

5. a. Montrer que : $\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = t^2 - t - 1$.

b. En déduire les solutions de l'équation (2).

c. Quel nom porte la seule solution possible ?

EXERCICE 4 **4 points**

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km â pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.
On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 0,99 d_n$. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

3. a. Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
$(L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n)$.

b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Le globe-trotter peut-t-il gagner ?

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

On rappelle que :

— La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

— La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :

$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ANNEXE de l'exercice 3 à rendre avec la copie