Baccalauréat TL Métropole juin 2000

EXERCICE 1 — 4 points

Une boîte contient $4n$ trombones de deux couleurs différentes : $2n+1$ sont jaunes et $2n-1$ sont verts ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$).
On prélève simultanément deux trombones au hasard.

1. Dans cette question on suppose que $n = 10$. Calculer la probabilité des évènement suivants (on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième).

   a. A : les deux trombones sont de couleurs différentes.

   b. B : les deux trombones sont verts.

   c. C : les deux trombones sont de même couleur.

2. Dans cette question, n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 1. On note p_n la probabilité de l'évènement « les deux trombones sont de couleurs différentes ».

   a. Montrer que $p_n = \dfrac{4n^2-1}{8n^2-2n}$.

   b. On considère la fonction f définie par

   $$f(x) = \frac{4x^2-1}{8x^2-2x} \quad \left(x \text{ réel, } x \neq 0, x \neq \frac{1}{4}\right),$$

   dont le tableau de variation est donné ci-après.

x	$-\infty$		0		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$4+\sqrt{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	$\frac{1}{2}$

   En utilisant ce tableau, déterminer l'entier naturel n pour lequel la probabilité p_n est maximale.

EXERCICE 2 — 5 points

Une municipalité envisage l'aménagement d'un plan d'eau artificiel. Dans le projet, ce plan d'eau devra contenir 30 000 m^3 le 1$^{\text{er}}$ juillet.
On estime qu'en période estivale les pertes hydriques dues à l'évaporation sont de 2 % par jour. Pour les compenser, on prévoit durant les mois d'été un apport, pendant chaque nuit, de 500 m^3.
Le problème est de savoir si les apports prévus pendant les mois de juillet et août seront suffisants pour que le volume ne descende pas en dessous de la valeur critique de 27 000 m^3. On note V_n le volume d'eau en m^3 contenu dans le plan d'eau, selon ce projet, au matin du n^{e} jour qui suit le 1$^{\text{er}}$ juillet. V_0 désigne le volume au matin du 1$^{\text{er}}$ juillet, on a donc $V_0 = 30000$; V_1 désigne le volume au matin du 2 juillet, etc.

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Expliquer pourquoi $V_{n+1} = V_n \times 0,98 + 500$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence précédente et ayant pour premier terme $V_0 = 30\,000$.

   a. Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.

   b. Pour tout entier n, on pose $U_n = V_n - 25\,000$. Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

   c. Exprimer U_n en fonction de n et en déduire que

   $$V_n = 5\,000 \times 0,98^n + 25\,000.$$

   d. Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles $V_n < 27\,000$? En déduire la réponse au problème posé en introduction.

PROBLÈME 11 points

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

On considère la fonction f définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = -x + 4 + \ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. étudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de $]1~;~+\infty[$ on a : $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ et en déduire le sens de variations de f sur cet intervalle.
3. **a.** Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   b. Montrer que, pour tout x de $]1~;~+\infty[$, $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
4. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à $-\dfrac{5}{3}$ et donner une équation de cette tangente Δ.
5. Montrer que, sur l'intervalle $[4~;5]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée de α au centième près.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et les droites D et Δ sur une feuille de papier millimétré (*on prendra comme unité graphique* 2 *cm sur chaque axe*).
7. **a.** Soit h la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par $h(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$.
   Montrer que la fonction H définie sur $]1~;~+\infty[$ par :

   $$H(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1)$$

   est une primitive de h sur cet intervalle.

   b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ (on donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).