∽ Baccalauréat L Métropole juin 2002 ∾

Durée : 3 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT L'EXERCICE 1 ET L'EXERCICE 2 ET AU CHOIX SOIT L'EXERCICE 3 SOIT L'EXERCICE 4.

Une feuille de papier millimétré est mise à la disposition du candidat

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

On considère un jeu de boules comme le jeu de pétanque par exemple. Un joueur lance une boule et on s'intéresse ici à la trajectoire de la boule.
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$g(x) = -x^2 + 1,5x + 1$$

où : x est le temps écoulé, en secondes, à partir de l'instant où la boule quitte la main du lanceur, $g(x)$ représente, en mètres, la distance (verticale) séparant le sol de la boule après x secondes écoulées.

1. La fonction g est représentée par une partie de la courbe donnée en annexe. Repasser en couleur la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g sur la feuille annexe.
2. **a.** Calculer $g(0)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 0.

   b. Calculer $g(1)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 1.
3. Calculer $g'(x)$, g' désignant la fonction dérivée de la fonction g.
4. **a.** Rechercher le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x, $x \in [0\,;\,2]$.

   b. En déduire le tableau complet des variations de la fonction g.

   c. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule atteint sa hauteur maximale.

   d. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule touche le sol.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

Les codes secrets des cartes bancaires sont formés de quatre chiffres pris de 0 à 9.
Pierre n'a pas noté celui de sa carte bancaire dans son agenda, mais comme il a peur de l'oublier, il a quand même noté la forme « cryptée » de son code secret de façon que son code secret ne soit pas découvert si son agenda était perdu.
Pierre réalise toujours son cryptage de la façon suivante :

— Il choisit deux chiffres a et b, appelés « clés du cryptage », qui vont lui servir a tout le cryptage.

— Il remplace chaque chiffre n de son code secret par le chiffre p, appelée forme cryptée de n, qu'il calcule à l'aide de la formule suivante

$$p \equiv a \times n + b \quad \text{(modulo 10)}.$$

L'objectif de la partie A est de retrouver le code secret de la carte bancaire de Pierre, connaissant les clés du cryptage.
L'objectif de la partie B est de retrouver les clés d'un autre cryptage.

LES PARTIES A ET B SONT DONC INDÉPENDANTES.

Partie A

Pierre a choisi ici $a = 3$ et $b = 7$.

Alors $p \equiv 3 \times n + 7 \quad$ (modulo 10).
Par exemple, la forme cryptée du chiffre 5 sera le chiffre 2.
Car $3 \times 5 + 7 = 22$ et $22 \equiv 2 \quad$ (modulo 10).

1. Reproduire et compléter la table de cryptage ci-dessous correspondant à la formule de Pierre.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p				6	9	2			1	

2. Pierre a inscrit 8 5 0 3 dans son agenda qui est la forme cryptée de son code secret. Quel est son véritable code secret ?

Partie B

Pierre a fait des émules.
Quentin utilise la même formule que Pierre $p \equiv a \times n + b \quad$ (modulo 10), mais en prenant deux autres valeurs de a et b parmi les chiffres de 0 à 9. Pierre prétend pouvoir déterminer la formule de Quentin (c'est-à-dire trouver les nombres a et b) car ce dernier lui a avoué les formes cryptées de deux chiffres :

— La forme cryptée du chiffre 3 est le chiffre 3 ;
— La forme cryptée du chiffre 4 est le chiffre 2.

1. Établir que découvrir a et b revient à résoudre le système d'inconnue $(a\ ;\ b)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a+b & = & 3 \quad \text{(modulo 10)} \\ 4a+b & = & 2 \quad \text{(modulo 10)} \end{array}\right.$$

où a et b sont des chiffres de 0 à 9.

2. Pierre prétend que le couple (9 ; 6) est une solution de ce système. Montrer qu'il a raison.

Exercice 3 ou exercice 4 ? Indiquer clairement votre choix sur la copie

EXERCICE 3 **7 points**

Soit $\mathrm{OA_0A_1}$ un triangle rectangle isocèle en $\mathrm{A_1}$.
Extérieurement au triangle $\mathrm{OA_0A_1}$, on construit sur le côté $[\mathrm{OA_1}]$ un triangle $\mathrm{OA_1}A_2$ rectangle isocèle en A_2.

1. On pose $\mathrm{OA_0} = 1$.
   Montrer que $\mathrm{OA_1} = \mathrm{A_0A_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
2. On itère le procédé et on trace une suite de triangles rectangles isocèles. Si $\mathrm{O}A_{n-1}A_n$ est un triangle rectangle isocèle en A_n, on trace alors extérieurement à celui-ci, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ rectangle isocèle enA_{n+1}.
   Établir que $\mathrm{O}A_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{O}A_n$.

   Dans la suite de l'exercice on note (u_n), la suite telle que $u_0 = \mathrm{OA_0}$, $u_1 = \mathrm{OA_1}$, $\ldots u_n = \mathrm{O}A_n$.
3. **a.** Déduire de la question précédente que la suite (u_n) est une suite géométrique et la caractériser.

   b. Exprimer (u_n) en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On note L_n la longueur de la ligne brisée $\text{OA}_0\text{A}_1 \dots A_{n-1}A_n$, c'est-à-dire :

$$L_n = \text{OA}_0 + \text{A}_0\text{A}_1 + \dots + A_{n-1}A_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Établir que $L_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ et en déduire la limite de la suite (L_n) lorsque n tend vers $+\infty$).

Formulaire

- Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.
- Si (v_n) est une suite géométrique de raison $q (q \neq 1)$ et de premier terme q_0, alors :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Exercice 3 ou exercice 4 ? Indiquer clairement votre choix sur la copie

Exercice 4 **7 points**

Une chaîne de fabrication produit des rasoirs jetables en très grand nombre.
À la sortie de la chaîne, chaque rasoir subit un test de contrôle par un automate.
L'automate rejette les rasoirs présentant un défaut. Il arrive cependant que le test ne décèle pas un défaut et laisse passer le rasoir, ou au contraire rejette un rasoir qui ne présente aucun défaut.
Une étude statistique faite sur un très grand nombre de rasoirs a en fait montré que :

— lorsque le rasoir est correctement fabriqué, le test confirme cela et accepte l'objet dans 998 cas sur 1 000 ;
— si le rasoir a un défaut de fabrication, le test détecte ce défaut et rejette le rasoir dans 985 cas sur 1 000 ;
— sur 1 000 rasoirs fabriqués, 980 n'ont aucun défaut, les autres sont défectueux.

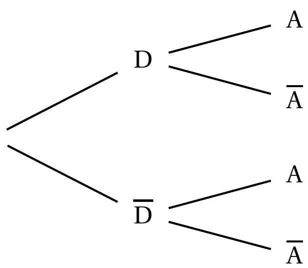
On choisit un rasoir au hasard.
On note dans la suite,
D l'évènement « le rasoir n'a pas de défaut de fabrication »,
$\overline{\text{D}}$ l'évènement contraire de D,
A l'évènement « le test accepte le rasoir »,
$\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A.

1. Décrire chacun des évènements suivants par une phrase :

$$\overline{\text{D}} \cap \text{A}, \quad \overline{\text{D}} \cap \overline{\text{A}}, \quad \text{D} \cap \text{A}, \quad \text{D} \cap \overline{\text{A}}.$$

2. À l'aide de l'énoncé, donner les probabilités suivantes :
$p_{\text{D}}(\text{A})$ (probabilité de A sachant que D est réalisé) et $p_{\overline{\text{D}}}\left(\overline{\text{A}}\right)$.

3. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en faisant figurer les résultats exacts.



b. Quelle est la probabilité qu'un rasoir soit accepté après le test de contrôle ?
Donnez l'arrondi avec une précision de 10^{-4}.