Baccalauréat L spécialité Métropole septembre 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisé — 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 — **6 points**

Hector a participé de très nombreuses fois à une compétition qui se déroule en deux manches. Il a enregistré sur cassette vidéo chacune des compétitions auxquelles il a participé, et il a constaté les faits suivants :

- il a gagné la première manche dans 95 % des cas ;
- quand il a perdu la première manche, il a aussi perdu la deuxième 3 fois sur 10 ;
- quand il a gagné la première manche, il a aussi gagné la deuxième dans 90 % des cas.

On choisit au hasard une des cassettes vidéo enregistrées par Hector et on la visionne. Il y a équiprobabilité des choix. On note :

- M_1 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la première manche » ;
- M_2 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la deuxième manche ».

On notera $\overline{M_1}$ l'évènement contraire de M_1 et $\overline{M_2}$ l'évènement contraire de M_2.

1. À l'aide de l'énoncé donner :
   - **a.** $P(M_1)$ la probabilité de l'évènement M_1,
   - **b.** $P_{M_1}(M_2)$ la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 est réalisé.
2. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilité et compléter cet arbre.
3. **a.** Montrer que la probabilité de voir Hector gagner les deux manches est de 0,855.
   - **b.** Quelle est la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 n'est pas réalisé ?
4. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement M_2.
   - **b.** Achille, arrivé en retard, voit Hector gagner la deuxième manche. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que sur cette cassette, Hector ait aussi gagné la première manche.

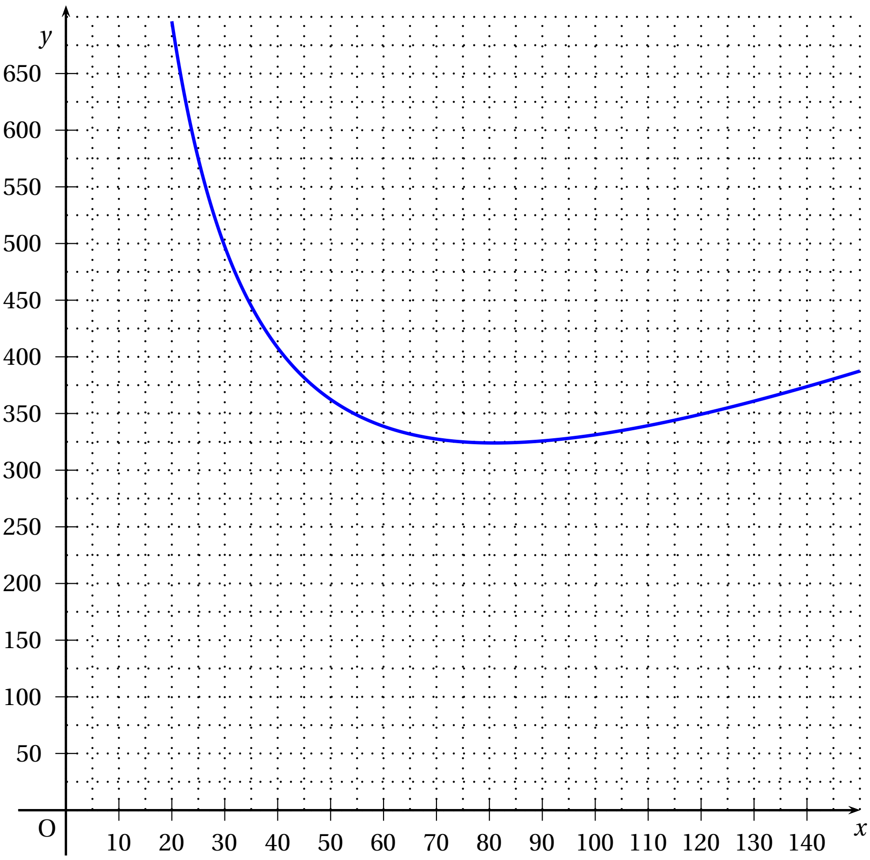
EXERCICE 2 — **7 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [20 ; 150] par

$$f(x) = 2x + \frac{13\,122}{x}.$$

1. Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$. En déduire que sur l'intervalle I, $f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
3. La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x) = 350$ (**le graphique n'est pas à rendre avec la copie.**)

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5 + \dfrac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

1. On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

a. Exprimer t en fonction de v.

b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à

$$\frac{3\,000}{v} + 2v.$$

c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

2. En utilisant la partie A :

a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

EXERCICE 3 **7 points**

Dans cet exercice, la description des programmes des constructions n'est pas demandée sur la copie. Cependant, on laissera apparents tous les traits de construction. La question 4 *est indépendante des questions* 1, 2 *et* 3.

1. Tracer à la règle sur la feuille de papier millimétré (sans donner d'explications) un carré ABCD dont les côtés ont pour longueur 16 cm. Placer son centre O et les milieux des côtés.

2. Dans cette question, on note c_0 la longueur en cm des côtés du carré ABCD.

a. Calculer la longueur de la diagonale [AC] du carré en fonction de c_0.

b. Tracer le cercle tangent aux quatre côtés du carré ABCD. Exprimer son diamètre en fonction de c_0.

c. Tracer le carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré ABCD.

d. En constatant que les diagonales du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ sont des diamètres du cercle $\mathcal{C}$, calculer la longueur c_1, des côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ en fonction de c_0.

3. Tracer le cercle $\mathcal{C}'$ tangent aux quatre côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ puis le carré $\mathrm{A''B''C''D''}$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}'$ dont les côtés sont parallèles â ceux du carré $\mathcal{C}'$. Exprimer la longueur c_2 des côtés de $\mathrm{A''B''C''D''}$ en fonction de c_1.

4. En renouvelant cette construction, on obtient une suite de carrés. On note c_3, c_4, c_5 et ainsi de suite la longueur des côtés des carrés successifs ainsi obtenus. Les calculs précédents ont montré que les premiers termes de la suite (c_n) sont ceux d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $c_0 = 16$. On admettra que ce résultat est vrai pour tous les termes de la suite (c_n).

a. Déterminer l'expression de c_n en fonction de n.

b. Calculer les valeurs exactes de c_6 et c_{12}.

c. Pour quelles valeurs de l'entier n, la longueur c_n, des côtés du $(n+1)$-ième carré construit est-t-elle strictement plus petite que 1 cm ?