Baccalauréat technique de la musique et de la danse
Métropole septembre 2010

Le candidat traitera trois exercices :

- Obligatoirement l'exercice 1
- Obligatoirement l'exercice 2
- Au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4

EXERCICE 1 **6 points**

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie et sans justification la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse ou une absence de réponse est comptée* 0 *point.*

On rappelle que :

- pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x ;
- pour tout nombre réel x, e^x désigne l'exponentielle de x ;
- pour tout nombre réel $x, \sin x$ désigne le sinus de x.

1. Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe d'équation $y = \ln x$

   a. n'a pas de point d'abscisse négative ou nulle.

   b. n'a pas de point d'ordonnée négative ou nulle.

   c. admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, l'équation $\ln x = -5$ a pour solution :

   a. -5e^5 **b.** $\dfrac{1}{\text{e}^5}$ **c.** $\text{e}^{\frac{1}{5}}$

3. Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation $\text{e}^x + 3 > 0$:

   a. n'admet aucune solution.

   b. admet une et une seule solution.

   c. admet tout réel x pour solution.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\text{e}^x$.
Sa fonction dérivée f' est donnée par :

   a. $f'(x) = \text{e}^x$ **b.** $f'(x) = x\text{e}^x$ **c.** $f'(x) = (x+2)\text{e}^x$

5. La fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x$ admet un maximum au point d'abscisse :

   a. 0 **b.** 2 **c.** e

6. Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe d'équation $y = \sin x$ admet une tangente au point O dont le coefficient directeur est égal à :

   a. 0 **b.** 1 **c.** -1

EXERCICE 2 **7 points**

On se place dans la gamme de tempérament égal. On rappelle que :

- une octave est divisée en douze demi-tons égaux séparant les notes DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI, DO ;
- à chaque octave est associé un indice n entier naturel ; les notes d'une octave portent l'indice de cette octave ; ainsi LA_3 correspond à la note LA de l'octave d'indice 3 et LA_4 correspond à la note LA de l'octave d'indice 4 située au-dessus de l'octave d'indice 3 ;

- à chaque note de chaque octave est associée une fréquence ;
- la suite des fréquences forme une suite géométrique de raison le nombre réel q défini par $q = \sqrt[12]{2}$ soit $q = 2^{\frac{1}{12}}$;
- la fréquence de la note LA_3 est égale à 440 Hz ;
- la différence de hauteur, exprimée en savarts, de deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2 avec $f_2 \geqslant f_1$ vaut $1\,000 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)$, où log désigne la fonction logarithme décimal.

1. On sait que l'intervalle entre les notes LA_3 et MI_4 est de sept demi-tons (ce qui correspond en musique à une quinte).

a. Démontrer que la fréquence de la note MI_4, arrondie à l'unité, est égale à 659 Hz.

b. Calculer la différence de hauteur, exprimée en savarts, des notes LA_3 et MI_4. Donner la valeur décimale arrondie au centième.

2. a. Calculer la fréquence de chacune des notes LA_4 et LA_2, situées respectivement une octave au-dessus et une octave au-dessous de la note LA_3.

b. Calculer la différence de hauteur, exprimée en savarts, entre les notes LA_3 et LA_4.
Donner la valeur décimale arrondie au centième.

3. La différence de hauteur entre deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2 (avec $f_2 \geqslant f_1$) est égale à $100,34$ savarts.

a. Montrer que la valeur décimale arrondie au centième du rapport $\dfrac{f_2}{f_1}$ est $1,26$.

b. Démontrer que l'intervalle entre les deux notes considérées est d'environ quatre demi-tons (ce qui correspond en musique à une tierce majeure).

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) — 7 points

Un luthier a constaté que, en moyenne :

- sur dix clients se présentant dans son atelier, un seul achète un violon ;
- parmi les clients qui achètent un violon, 30 % achètent aussi un archet ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de violon, 20 % achètent un archet.

Le luthier a dressé la liste de tous les clients qui se sont présentés dans l'atelier pendant une période donnée.
On choisit au hasard un client dans cette liste. Chaque client a la même probabilité d'être choisi.

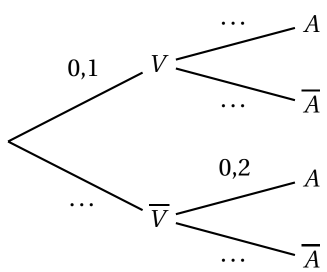
On note :

V l'évènement « le client a acheté un violon » ;

A l'évènement « le client a acheté un archet ».

On rappelle que l'évènement contraire d'un évènement E est noté $\overline{E}$.

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant qui correspond à cette situation :



2. a. Calculer la probabilité que le client ait acheté un violon et un archet.
   b. Calculer la probabilité que le client n'ait rien acheté.
   c. En déduire la probabilité que le client ait acheté au moins un des deux objets.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $0,21$.
4. Calculer la probabilité que le client ait acheté un violon sachant qu'il a acheté un archet. On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième.

EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) — 7 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;\ 4]$ par

$$f(x) = (3 - x)\ln x.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.

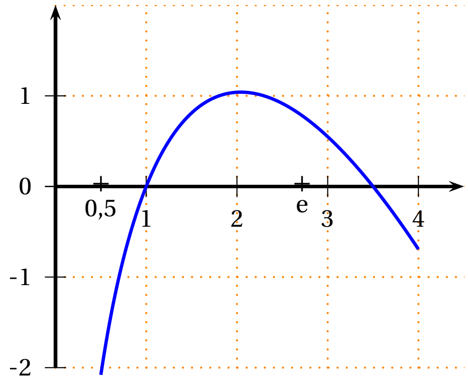
1. a. Calculer la valeur exacte du nombre réel $f(\text{e})$, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0,5\,;\,4]$.
   c. Parmi les trois courbes proposées en annexe, une seule représente la fonction f.
   En utilisant les questions précédentes la déterminer. Pour cela, donner, pour chaque courbe éliminée, au moins un argument justifiant son élimination.
2. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$ par

$$F(x) = \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\ln x + \frac{1}{4}x^2 - 3x.$$

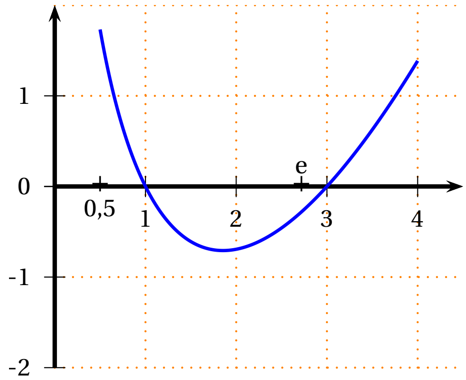
   On désigne par F' la fonction dérivée de la fonction F.
   a. Calculer, pour tout x de l'intervalle $[0,5\,;\,4]$, $F'(x)$.
   b. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$.
   c. Calculer l'intégrale I définie par $\text{I} = \displaystyle\int_1^3 (3 - x)\ln x\,\text{d}x$. En donner la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième.
   d. On désigne par $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
   Déduire des questions précédentes la valeur décimale arrondie au dixième de la mesure $\mathscr{A}$.

EXERCICE 4 : ANNEXE

Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3