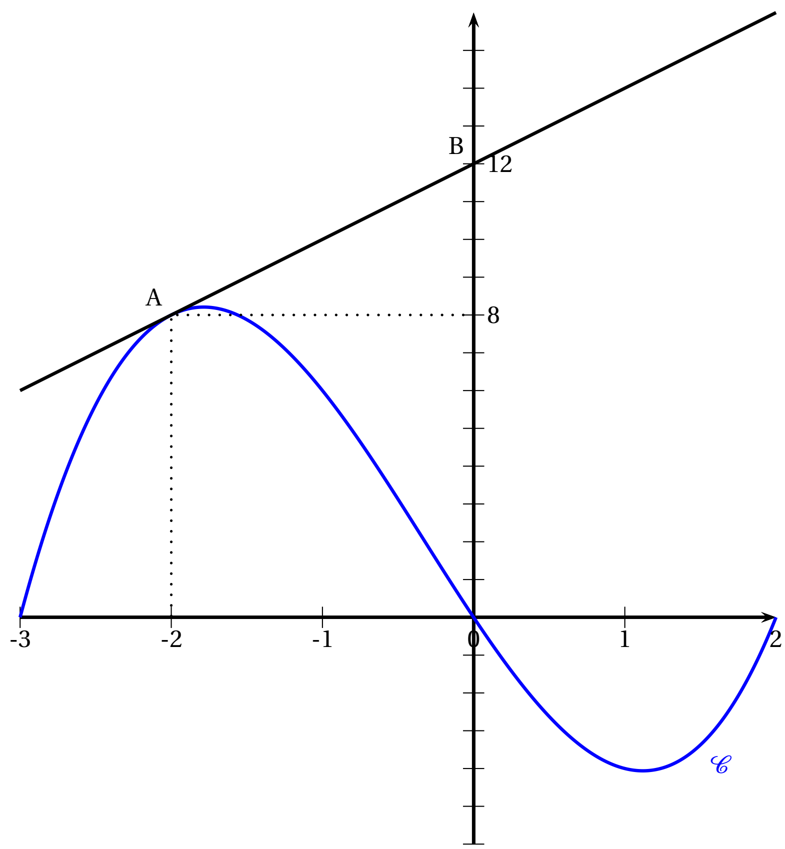
∽ Baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾
Métropole juin 2003

EXERCICE **7 points**

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



1. **En utilisant ce graphique :**
   a. Donner les valeurs entières de $f(-2)$ et $f(-1)$.
   b. Donner, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   c. Donner, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
2. A est le point de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour abscisse -2 et B est le point de coordonnées $(0\,;12)$.
   En admettant que la droite (AB) est tangente au point A à la courbe $\mathscr{C}$, calculer $f'(-2)$.
3. On suppose qu'il existe des réels a, b, c et d tels que pour tout x de l'intervalle $\mathscr{C}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   a. En utilisant certains résultats obtenus au 1. a. et au 1. b., montrer que les réels a, b, c et d vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -27a+9b-3c+d & = & 0\\ d & = & 0\\ 8a+4b+2c+d & = & 0\\ -8a+4b-2c+d & = & 8 \end{array}\right.$$

b. En déduire les valeurs des réels a, b, c et d et donner l'expression de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $[-3~;~2]$.

PROBLÈME **13 points**

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x - \mathrm{e}^{x}.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.

a. Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, l'expression de $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

2. Établir le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne calculera pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$).

a. Quel est le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$?

b. Quel est le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$?

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{x},$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}*$, $f(x) = x^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2}\right)$.

En utilisant le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^2} = +\infty$, déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

b. En utilisant la partie I. 3. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. a. Préciser le coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

b. Dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, tracer la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}$.

4. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.