Baccalauréat TMD Métropole juin 2004

EXERCICE **7 points**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + a + b\mathrm{e}^{-x},$$

où a et b sont des réels.
On rappelle que e^{-x} peut aussi s'écrire $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
La courbe $\mathscr{C}$, sur la feuille annexe à rendre avec la copie, est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour tout nombre réel x, déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ sachant que ces valeurs sont de nombres entiers.
3. En déduire un système d'équations vérifié par les nombres réels a et b.
   Résoudre ce système pour déterminer les nombres réels a et b.
   On choisit pour la suite de l'exercice $f(x) = x + 3 + \mathrm{e}^{-x}$.
4. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
6. On nomme A le point d'abscisse -1 de la courbe $\mathscr{C}$.
   Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
7. Tracer la droite D et la tangente T dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille annexe que l'on joindra à la copie.

PROBLÈME **13 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x^2(2\ln x - 3),$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$,
   $f'(x) = 4x(\ln x - 1)$.
3. Résoudre dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$, l'inéquation $\ln x - 1 > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$.

4. Déterminer les valeurs exactes de $f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$, $f(1)$, $f\left(\sqrt{\text{e}}\right)$ et $f(\text{e})$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.
   On portera les valeurs de $f(\text{e})$ et $f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$ et leur valeurs arrondies à 10^{-2} près.
6. On nomme A le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   On fera apparaître le point A et la tangente au point d'abscisse e à la courbe $\mathcal{C}$.
8. Soit m un nombre réel.
   Déterminer graphiquement selon la valeur de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\text{e}}~;~+\infty\right[$ par
$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 \ln x - \frac{11}{9}x^3.$$
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\text{e}}~;~+\infty\right[$.
2. Calculer l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.
   En donner la valeur exacte ainsi que la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Feuille annexe à rendre avec la copie