Baccalauréat technique de la musique et de la danse
Métropole juin 2005

EXERCICE **7 points**

Sur le schéma 1. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1 ; 5]$.
On précise que la courbe passe par les points O$(0 ; 0)$, A $(1 ; 1)$ et B $(3 ; 0)$.

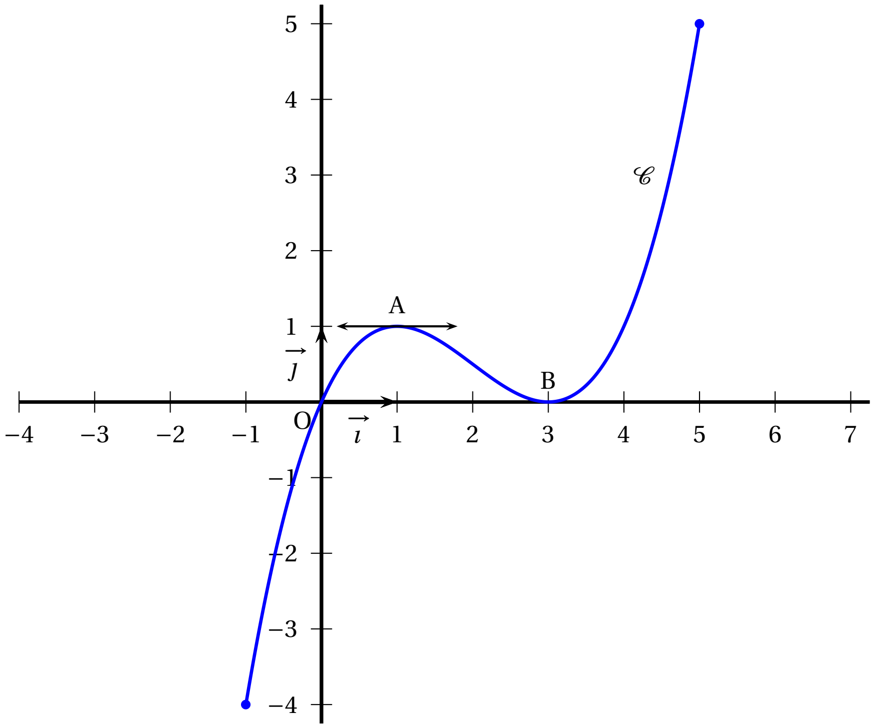

Schéma 1

1. L'un des trois schémas suivants, 2, 3 ou 4, correspond à la courbe représentative de la dérivée f' de f. Préciser lequel, en justifiant la réponse.

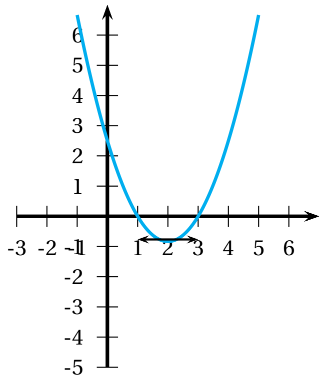

Schéma 2

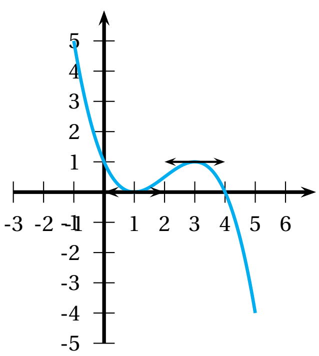

Schéma 3

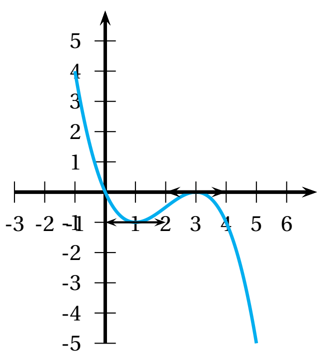

Schéma 4

2. Soit m un réel quelconque. Préciser graphiquement (à l'aide du schéma 1), le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant la valeur de m.

3. On admet que $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx$ où a et b sont des nombres réels.

a. Calculer $f(1)$ et $f(3)$ en fonction de a et b.

b. En déduire les nombres réels a et b.

c. À l'aide de l'expression de la fonction f, retrouver les valeurs de $f'(1)$ et $f'(3)$.

PROBLÈME **13 points**

Soit f la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** En justifiant que $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) + 4$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$; en déduire l'existence d'une asymptote D au voisinage de $-\infty$, dont on précisera une équation.

   c. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

   d. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

   e. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur de $f\left[\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)\right]$.

2. Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Calculer les valeurs exactes de l'ordonnée de A et du coefficient directeur de la droite T.

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$.

   b. En déduire la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter avec les valeurs décimales arrondies à 10^{-1} près.

x	-5	-4	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	$1,6$
$f(x)$											

5. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote D, la tangente T puis la courbe $\mathcal{C}$ en tenant compte des résultats obtenus aux questions 3. et 4.

6. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln(4)} f(x)\,\mathrm{d}x$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près).