∽ Baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾ Métropole juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie, sans justification, la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,25 *point et une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à* 0.
Rappels :

- Si a et b sont des entiers et c un entier naturel non nul : f« a congru à b modulo c »s'écrit $a \equiv b \pmod{c}$.
- À chaque note de la gamme de tempérament égal on associe un entier naturel, compris entre 0 et 11, comme indiqué dans le tableau suivant :

Note	DO	DO#	RÉ	RÉ#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- Dans la gamme de tempérament égal, une quinte vaut sept demi-tons.
- Lorsque l'on ajoute une quinte à une note associée au nombre p, cette note est transformée en une note associée au nombre q tel que $p+7 \equiv q \pmod{12}$.

1. Dans la division euclidienne de 2 008 par 12 :

a. Le reste est égal à 8. **b.** Le reste est égal à 4. **c.** Le reste est égal à 0,33.

2. L'entier 143 est congru à l'entier -18

a. modulo 5 **b.** modulo 2 **c.** modulo 7

3. Soit un entier x. Si $x \equiv 2 \pmod{5}$, alors :

a. $x^5 \equiv x \pmod{5}$ **b.** $x^5 \equiv 1 \pmod{5}$ **c.** $x^5 \equiv 0 \pmod{5}$

4. En ajoutant cinq quintes à la note LA on obtient la note SOL# car :

a. $8+5\times 7 \equiv 9$ (modulo 12) **b.** $9+5\times 8 \equiv 7$ (modulo 12) **c.** $9+5\times 7 \equiv 8$ (modulo 12)

5. Sachant qu'en ajoutant n quintes à la note RÉ on obtient la note FA, l'entier n est tel que :

a. $2+n \equiv 5$ (modulo 12) **b.** $7n \equiv 3$ (modulo 12) **c.** $2+7n \equiv 6$ (modulo 12)

EXERCICE 2 **8 points**

On désigne par I l'intervalle [0,5 ; 8].
On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle I par :

$$f(x) = (2-\ln x)\times \ln x,$$

où $\ln x$ désigne le logarithme népérien du nombre x.
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{2}{x}(1-\ln x)$.

2. **a.** Résoudre, dans l'intervalle I, l'équation $1-\ln x=0$, puis l'inéquation $1-\ln x>0$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$, pour tout x de l'intervalle I, et dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.
3. **a.** Résoudre, dans l'intervalle I, l'équation $f(x)=0$; on donnera la valeur exacte de chaque solution.
   b. Donner une interprétation graphique de ces solutions pour la courbe $\mathscr{C}$.
4. Déterminer, sous la forme $y=ax+b$, l'équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
5. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant ; on donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième.

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

6. Construire, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ ainsi que la tangente $\mathscr{D}'$ au point d'abscisse e.

EXERCICE 3 **7 points**

Enseignement obligatoire (au choix)

Dans un groupe d'enfants qui s'intéressent à l'informatique et à la musique, on constate que :

- 80 % des enfants ont un ordinateur à la maison ;
- 74 % des enfants qui n'ont pas d'ordinateur à la maison jouent d'un instrument de musique ;
- 28 % des enfants ont un ordinateur à la maison et jouent d'un instrument de musique.

On choisit un enfant au hasard dans le groupe. Chaque enfant a la même probabilité d'être choisi.

On considère les évènements suivants :

O : « l'enfant a un ordinateur à la maison » ;

J : « l'enfant joue d'un instrument de musique ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement O et celle de l'événement contraire $\overline{O}$.
   b. Donner la probabilité de l'évènement J sachant que l'événement $\overline{O}$ est réalisé.
2. Démontrer que la probabilité que l'enfant joue d'un instrument de musique sachant qu'il a un ordinateur à la maison est égale à $0,35$.
3. Construire l'arbre de probabilité traduisant la situation.
4. Démontrer que la probabilité que l'enfant joue d'un instrument de musique est égale à $0,428$.
5. Calculer la probabilité de l'évènement « l'enfant a un ordinateur à la maison »sachant qu'il joue d'un instrument de musique ; en donner la valeur décimale arrondie au millième.

EXERCICE 4 **7 points**

Enseignement renforcé (au choix)

Plusieurs représentations d'un même spectacle sont données dans une salle de 400 places. On a relevé le nombre de spectateurs à chacune des cinq premières représentations.

Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant où x_i désigne le rang de la représentation et y_i désigne le nombre de spectateurs correspondant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	365	320	275	248	198

1. **a.** Représenter le nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal du plan, où 2 cm représentent 1 rang en abscisse et 2 cm représentent 50 spectateurs en ordonnée.

   b. Préciser pourquoi un ajustement affine est envisageable.

2. **a.** Donner, sous la forme $y = ax+b$, l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de y en x du nuage, obtenue par la méthode des moindres carrés ; les coefficients a et b seront donnés par la calculatrice.

   b. Construire, en précisant les coordonnées des points utilisés, la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique précédent.

   On suppose que la tendance d'évolution se poursuit.

3. **a.** Déterminer graphiquement une estimation du nombre de spectateurs à la septième représentation ; on laissera apparents les traits nécessaires à cette lecture graphique.

   b. Vérifier le résultat par le calcul.

4. Les organisateurs du spectacle estiment qu'une représentation est rentable s'il y a au moins 70 spectateurs.

   a. Déterminer, par le calcul, à partir de quelle représentation le seuil de rentabilité ne sera pas atteint.

   b. Vérifier le résultat sur le graphique, en laissant apparents les traits nécessaires à cette lecture graphique.