∽ Baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾
Métropole septembre 2007

EXERCICE 1 **7 points**

Dans une université, 55 % des étudiants possèdent un ordinateur. Parmi les étudiants ayant un ordinateur :

- 20 % ont un violon ;
- 30 % ont une flûte ;
- Aucun étudiant ne possède à la fois une flûte et un violon.

Parmi les étudiants n'ayant pas d'ordinateur :

- 5 % ont un violon ;
- 15 % ont une flûte ;
- Aucun étudiant ne possède à la fois une flûte et un violon.

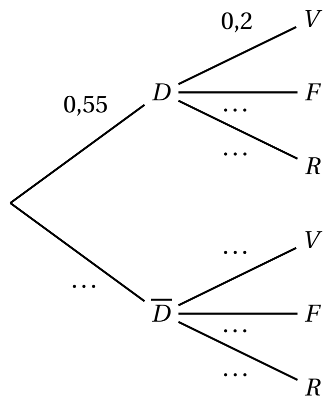
On choisit au hasard un étudiant de cette université. Tous les étudiants ont la même probabilité d'être choisis.

On définit les évènements suivants :

- D : « l'étudiant a un ordinateur » ;
- V : « l'étudiant a un violon » ;
- F : « l'étudiant a une flûte » ;
- R : « l'étudiant n'a aucun de ces deux instruments de musique ».

On rappelle que $\overline{D}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement D.

1. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant n'ait pas d'ordinateur.
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant, correspondant à la situation décrite par l'énoncé.



3. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « l'étudiant a un ordinateur et un violon ».

   b. Calculer la probabilité de l'évènement « l'étudiant a un violon et n'a pas d'ordinateur ».

   c. En déduire que la probabilité de l'évènement V est égale à 0,132 5.

   Quelle est la probabilité de l'évènement « l'étudiant a un ordinateur »sachant qu'il a un violon ?

   On donnera la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **6 points**

Questionnaire à choix multiple

Pour chacune des questions 1 *à* 6*, trois affirmations sont proposées dont* ***une seule est exacte****.*
Indiquer sur la copie, pour chaque question, la bonne réponse.
Toute réponse bonne donne 1 *point, toute mauvaise réponse enlève* 0,5 *point, une absence de réponse ne donne aucun point et n'en enlève aucun. S'il est négatif, le total de l'exercice est ramené à* 0.

On désigne par log le logarithme décimal et par ln le logarithme népérien.

1. Soit T le nombre réel tel que : $5^{4000} = 10^{\mathrm{T}}$. Alors on peut affirmer que :

a. $\ln \mathrm{T} = 4000 \ln 5 - \ln 10$ **b.** $\log 5 = \dfrac{\mathrm{T}}{4000}$ **c.** $\mathrm{T} = 2000$

2. On rappelle que, dans la gamme de tempérament égal :
— l'octave est divisée en douze demi-tons égaux séparant les notes, si bien que la suite des fréquences des notes est géométrique de raison q où q est un nombre réel positif tel que $q^{12} = 2$.
— une quarte juste contient cinq demi-tons.
Dans cette gamme, le rapport des fréquences correspondant à une quarte juste ascendante est :

a. égal à $\dfrac{4}{3}$ **b.** inférieur à $\dfrac{4}{3}$ **c.** égal à $2^{\frac{5}{12}}$

3. La somme d'une fonction sinusoïdale de fréquence 400 Hz et d'une fonction sinusoïdale de fréquence 800 Hz, est :
a. non périodique
b. périodique de fréquence 1 200 Hz
c. périodique de fréquence 400 Hz

4. On rappelle que :
Si a, b et c sont des entiers naturels, « a congru à b modulo c »s'écrit :
$a \equiv b\,(\text{modulo } c)$.
L'équation $7n \equiv 11\,(\text{modulo } 12)$ d'inconnue n, entier compris entre 0 et 6 :

a. a une solution et une seule **b.** n'a aucune solution **c.** a deux solutions

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathrm{e}^{-3x+1} < \mathrm{e}^{-2x+3}$ d'inconnue réelle x est :

a. l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$ **b.** l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$ **c.** $]-2\,;\,+\infty[$

6. On considère une échelle de fréquence logarithmique graduée de 40 à 10 000 Hz et de longueur totale 24 cm.
Sachant que de 40 Hz à 10 000 Hz, il y a entre sept et huit octaves, on peut alors affirmer que sur cette échelle :
a. toutes les octaves ont une « largeur » de 15 mm environ.
b. toutes les octaves ont une « largeur » de 3 cm environ.
c. l'octave DO_4–DO_5 a une « largeur » bien supérieure à l'octave DO_3–DO_4. On considère ici que la note DO_4 correspond à une fréquence de 520 Hz.

EXERCICE 3 **7 points**

Enseignement obligatoire (au choix)

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x.$$

a. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
Les limites aux bornes de l'intervalle ne sont pas demandées.

d. En déduire que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $g(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{x}.$$

On désigne par f', la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout x de J'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. À l'aide des résultats de la question 1., en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
Les limites aux bornes de l'intervalle ne sont pas demandées.

d. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en donnant, à chaque fois, une valeur décimale approchée à 10^{-1} près :

x	0,75	1	1,5	2	3	4	5	6	7
$f(x)$									

e. Tracer la courbe représentative de la fonction f **sur l'intervalle [0,75 ; 7]**, dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.

EXERCICE 4 **7 points**

Enseignement renforcé (au choix)

A. On considère la fonction T définie pour tout réel x de l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$T(x) = 2\cos\left(\frac{2x}{3}\right).$$

1. Calculer le réel $T\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x tel que $0 \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$, on a $0 \leqslant \dfrac{2x}{3} < \dfrac{\pi}{2}$.

b. En déduire le signe de $T(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Par la suite, on admettra que si x appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{3\pi}{4}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$ alors $T(x) < 0$.

B. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{2x}{3}\right).$$

1. Calculer les réels $f(0)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. **a.** On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$, $f'(x) = T(x)$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

C.

1. Calculer l'intégrale I définie par $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} 3\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\,\mathrm{d}x$.

2. Sur le graphique de la fin, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère le domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

Déduire du calcul de l'intégrale I, la mesure $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, de ce domaine.

FEUILLE ANNEXE

ENSEIGNEMENT RENFORCÉ (au choix)

Exercice 4 : annexe