Baccalauréat technique de la musique et de la danse
Métropole septembre 2011

Le candidat traitera trois exercices :

- Obligatoirement l'exercice 1
- Obligatoirement l'exercice 2
- Au choix l'exercice 3 **ou** l'exercice 4

EXERCICE 1 **6 points**

Un conservatoire organise un spectacle et auditionne des élèves de TMD. Parmi les élèves auditionnés, 80 % sont des musiciens et les autres sont des danseurs. Le conservatoire retient pour le spectacle 75 % des musiciens et 60 % des danseurs.
On interroge au hasard un des élèves auditionnés.
Chaque élève auditionné a la même probabilité d'être interrogé.
On considère les évènements suivants :

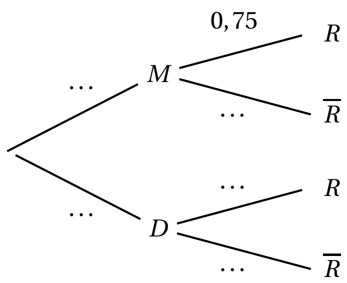
M : « l'élève interrogé est musicien » ;

D : « l'élève interrogé est danseur » ;

R : « l'élève interrogé est retenu pour le spectacle ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant qui correspond à cette situation.



2. **a.** Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit musicien et soit retenu pour le spectacle.

   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $0,72$.
3. Les évènements M et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
4. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit musicien sachant qu'il est retenu pour le spectacle. On donnera la valeur décimale arrondie au centième.

EXERCICE 2 **7 points**

Partie 1. Étude graphique

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 3]$.
L'unité graphique est de 2 cm en abscisse et de 1 cm en ordonnée.

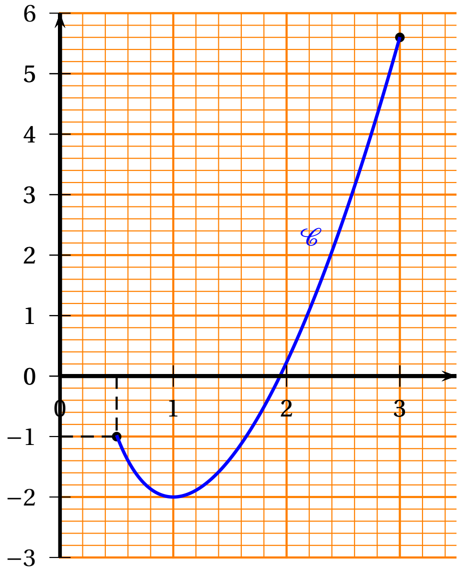
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. **a.** Donner, avec la précision que permet le graphique, les valeurs des nombres $f(0,5)$ et $f(3)$;

   b. du nombre réel α de l'intervalle $[0,5 ;\ 3]$ tel que $f(\alpha) = 0$;

   c. de la valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 3]$.

2. Sur quel intervalle, la fonction f est-elle positive ?



Partie 2. Étude de la fonction

On désigne par ln la fonction logarithme népérien.
La fonction f représentée dans la partie 1 est définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; 3]$, par

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 - 4\ln x.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Calculer, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; 3]$, $f'(x)$.
2. Développer l'expression $(x-1)(x+2)$.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; 3]$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+2)}{x}.$$

4. Étudier le signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0,5 ; 3]$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 3]$.

EXERCICE 3 **7 points**

Enseignement obligatoire (au choix)

Dans la gamme de tempérament égal :

- l'octave est divisée en 12 demi-tons égaux séparant les notes ; cela se traduit mathématiquement par le fait que la suite des fréquences des notes est une suite géométrique de raison q , où q est le nombre réel strictement positif tel que $q^{12} = 2$;
- une quinte juste contient sept demi-tons ; une quarte contient cinq demi-tons ;
- les notes d'une octave sont : DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI ;
- à chaque octave est associé un indice n entier naturel ; les notes d'une octave portent l'indice de cette octave ; ainsi LA_3 correspond à la note LA de l'octave d'indice 3 et LA_4 correspond à la note LA de l'octave d'indice 4 située au-dessus de l'octave d'indice 3 ;
- la fréquence, exprimée en hertz (Hz), de la note LA_3 est 440 Hz ;
- la différence de hauteur entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 (avec $f_1 > f_2$) est le nombre $10^3 \log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ où log désigne la fonction logarithme décimal ; cette différence de hauteur s'exprime en savarts quand les fréquences sont exprimées en hertz.

Dans les questions 1. et 2., on ne tiendra pas compte des indices des octaves.

1. **a.** On part de la note LA. On ajoute quatre quintes. Quelle note obtient-on ?

   b. Montrer que l'on obtient la même note qu'au a. en retranchant quatre quartes de la note LA.

2. On désigne par n un entier naturel non nul.

   a. Établir la congruence $7n \equiv -5n \quad (\text{modulo } 12)$.

   b. On ajoute n quintes à la note LA. Obtient-on la même note lorsque l'on retranche n quartes de la note LA ?

3. On part de la note LA_3.

   a. Calculer la fréquence f_1, exprimée en hertz, de la note obtenue en ajoutant quatre quintes à la note LA_3. On donnera la valeur arrondie à l'unité.

   b. Calculer la fréquence f_2, exprimée en hertz, de la note obtenue en retranchant quatre quartes de la note LA_3. On donnera la valeur arrondie à l'unité.

   c. Calculer la différence de hauteur, exprimée en savarts, entre les deux notes obtenues aux questions 3. a. et 3. b. On donnera la valeur arrondie à l'unité.

EXERCICE 4 **7 points**

Enseignement renforcé (au choix)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1 - \mathrm{i}$ et le point B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

1. Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique, c'est-à-dire sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

2. **a.** Placer le point A dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.
   On pourra exploiter le graphique.

3. **a.** Sachant que le module du nombre complexe z_B est 2, démontrer qu'un argument de z_B est $\dfrac{\pi}{6}$.

   b. Construire le point B dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

4. **a.** À l'aide des résultats établis dans les questions 2. b. et 3. a., déterminer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{z_B}{z_A}$.

   b. En déduire que : $\dfrac{z_B}{z_A} = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

   c. Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.