Baccalauréat technique de la musique et de la danse
Métropole juin 2010

Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

Durée : 2 heures

LE CANDIDAT TRAITERA TROIS EXERCICES :

- OBLIGATOIREMENT L'EXERCICE 1
- OBLIGATOIREMENT L'EXERCICE 2
- AU CHOIX L'EXERCICE 3 OU L'EXERCICE 4

LE CANDIDAT INDIQUERA CLAIREMENT SON CHOIX SUR LA COPIE.

EXERCICE 1 **6 points**

Tous les élèves lycéens en section TMD se réunissent pour proposer un concert.
Ils se répartissent de la manière suivante : la proportion d'élèves en classe de seconde est de $\frac{2}{5}$; la proportion d'élèves en classe de première est de $\frac{4}{15}$; les autres sont en terminale.
À l'occasion de ce concert, certains élèves vont se produire en solistes :

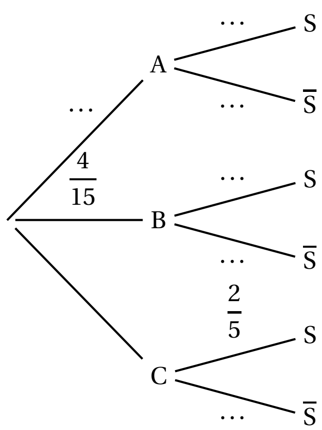
- en seconde, la proportion de solistes est de $\frac{1}{6}$;
- en première, la proportion de solistes est de $\frac{1}{4}$
- en terminale, la proportion de solistes est de $\frac{2}{5}$

Un journaliste interroge au hasard un élève lycéen en section TMD. Chaque élève lycéen en section TMD a la même probabilité d'être interrogé.
On considère les évènements suivants :

A : « l'élève interrogé est en seconde » ;
B : « l'élève interrogé est en première » ;
C : « l'élève interrogé est en terminale » ;
S : « l'élève interrogé se produira en soliste ».

On rappelle que $\overline{\text{S}}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Prouver que la probabilité que l'élève interrogé soit en terminale est $\frac{1}{3}$.
2. Donner la probabilité que l'élève interrogé se produise en soliste sachant que cet élève est en première.
3. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant correspondant à la situation décrite par l'énoncé.



4. Prouver que la probabilité que l'élève interrogé soit en première et qu'il se produise en soliste est $\frac{1}{15}$.

5. Prouver que la probabilité que l'élève interrogé se produise en soliste est $\dfrac{4}{15}$.

6. Quelle est la probabilité que l'élève interrogé soit en terminale sachant que cet élève se produit en soliste ?

EXERCICE 2 **7 points**

Les questions qui suivent font référence à la gamme de tempérament égal.
Dans cette gamme, l'octave est divisée en douze demi-tons égaux séparant les notes.

Les notes d'une octave sont : DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.

Une quarte juste contient cinq demi-tons. Une quinte juste contient sept demi-tons.
On rappelle également que :
si a et b sont des entiers relatifs, « a congru à b modulo 12 » s'écrit $a \equiv b \pmod{12}$.

1. On augmente un RÉ de 70 demi-tons.

a. De combien de quintes justes l'a-t-on augmenté ?

b. De combien de quartes justes l'a-t-on augmenté ?

c. Déterminer un entier a compris entre -11 et 11 satisfaisant la relation de congruence suivante : $70 \equiv a \pmod{12}$.

d. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la note obtenue quand on augmente un RÉ de 70 demi-tons.

2. On passe d'un LA à un DO en augmentant de x demi-tons (où x désigne un entier naturel).

a. Donner une valeur possible pour l'entier x.

b. Donner une relation de congruence modulo 12 vérifiée par x.
Déterminer deux autres valeurs possibles pour l'entier x.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau de congruences modulo 12 suivant en ne complétant qu'avec des entiers compris entre 0 et 11 :

$n \equiv \ldots \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$5n \equiv \ldots \pmod{12}$					8		6					

b. On passe d'un MI à un SI en augmentant de n quartes justes (où n désigne un entier naturel).
Écrire une relation de congruence modulo 12 vérifiée par l'entier n. Donner alors une valeur possible pour l'entier n.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) **7 points**

On désigne par I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,5\right]$.
On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle I, par :

$$f(x) = x\ln(x) - x, \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer $f(1)$ et $f(\mathrm{e})$.

b. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \ln(x)$.

c. Rappeler quel est, selon le réel x strictement positif, le signe de l'expression $\ln(x)$.
En déduire, pour tout réel x de l'intervalle I, le signe de $f'(x)$.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

2. **a.** On désigne par $\mathscr{D}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse e.
Déterminer l'équation de la forme $y = ax + b$ de la droite $\mathscr{D}$.

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{D}'$, parallèle à l'axe des abscisses en un point B.
Donner les coordonnées de ce point B.

3. **a.** Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On donnera, dans chaque cas, la valeur décimale arrondie au dixième.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	e	3	4	5
$f(x)$								

Tracer, dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et la droite $\mathscr{D}'$. On prendra comme unité graphique 2 cm sur chaque axe.

EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) **7 points**

On désigne par I l'intervalle $[-1 ; 2]$.
On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle I, par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x}, \quad \text{où } \mathrm{e}^{x} \text{ représente l'exponentielle du nombre réel } x.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer les valeurs exactes des nombres réels $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x}$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle I, étudier le signe de $f'(x)$.
Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

3. **a.** La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des abscisses en un point A.
Donner les coordonnées de ce point A.

b. Sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en prenant pour unité graphique 3 cm. Tracer sur ce graphique la droite $\mathscr{D}$.

4. **a.** On considère la fonction F définie, pour tout réel x de l'intervalle I, par :

$$F(x) = (3 - x)\mathrm{e}^{x}.$$

Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

b. On considère l'intégrale K définie par : $K = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer l'intégrale K.

5. On considère la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 2$ et la courbe $\mathscr{C}$.
On désigne par $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie du plan.

a. Hachurer cette partie du plan sur le graphique de la feuille annexe (**à rendre avec la copie**).

b. Déterminer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième de la mesure $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2

EXERCICE 4 : ANNEXE (à rendre avec la copie)