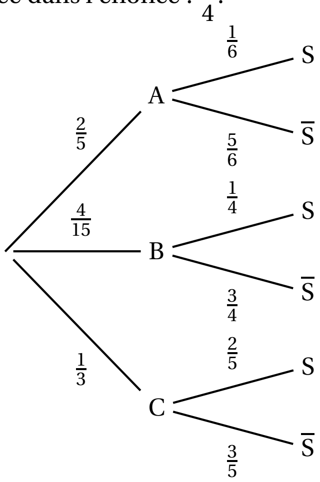
∽ Corrigé du baccalauréat TMD ∾
Métropole juin 2010

EXERCICE 1 **6 points**

1. Il reste en terminale :
$1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{15-6-4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

2. La probabilité est donnée dans l'énoncé : $\frac{1}{4}$.

3.



4. Il faut trouver $p(B \cap S$.

$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = \frac{4}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$.

5. On calcule de même :

$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$.

$p(C \cap S) = p(C) \times p_C(S) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$.

Finalement :

$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) = \frac{4}{15}$.

6. Il faut trouver :

$p_S(C) = \frac{p(C \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{15}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 **7 points**

1. **a.** $70 = 7 \times 10$. Le RÉ a été augmenté de 10 quintes justes.

b. $70 = 5 \times 14$. Le RÉ a été augmenté de 14 quartes justes.

c. On a $70 = 6 \times 12 - 2$, donc $70 \equiv -2 \quad$ (modulo 12).

d. D'après la question précédente le RÉ est devenu un RÉ six octaves au dessus moins deux demi-tons soit un DO.

2. **a.** On passe d'un LA à un DO en augmentant de 3 demi-tons.

b. On obtient également un DO pour tous les octaves suivants, c'est-à-dire en ajoutant un nombre entier de 12 demi-tons.

On a donc $x = 3 + 12n$, avec $n \in \mathbb{N}$, soit $x \equiv 3 \quad$ (modulo 12).

On a donc $x \in \{3 ; 15 ; 27 ; 39 ; \cdots\}$.

3. **a.**

$n \equiv \ldots$ (modulo 12)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$5n \equiv \ldots$ (modulo 12)	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7

b. On passe d'un MI à un SI en augmentant de 7 demi-tons, donc de $\frac{7}{5}$ quartes. En ajoutant n quartes soit $5n$ demi-tons, on doit donc arriver à $5n = 12k+7$ avec $k \in \mathbb{N}$ nombre d'octaves, soit encore $5n \equiv 7 \quad (\text{modulo } 12)$.

D'après le tableau précédent il en résulte que $n \equiv 11 \quad (\text{modulo } 12)$.

Exemples : $n = 11, 23$, etc. Ainsi pour $n = 11$, soit 55 demi-tons on a bien : $55 = 4 \times 12 + 7$: on avance bien de quatre octaves et d'une quarte juste donc de MI à SI.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) **7 points**

1. **a.** $f(1) = 1\ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$; $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur I et sur cet intervalle :

$f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

c. On sait que :

- sur $]0\,;\,1[$, $\ln(x) < 0$;
- $\ln(1) = 0$;
- sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln(x) > 0$.

Donc pour f :

- sur $\left]\frac{1}{4}\,;\,1\right[$, $f'(x) < 0$;
- $f'(1) = 0$;
- sur $]1\,;\,5[$, $f'(x) > 0$.

d. On en déduit :

Sur $\left]\frac{1}{4}\,;\,1\right[$, f est décroissante ;

Sur $]1\,;\,5[$, f est croissante.

2. **a.** Le point A a pour coordonnées $(\mathrm{e}\,;\,0)$ et le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse e est égal à $f'(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1$.

Une équation de $\mathscr{D}$ est donc $y = x + b$.

$A \in \mathscr{D} \iff 0 = \mathrm{e} + b \iff b = -\mathrm{e}$.

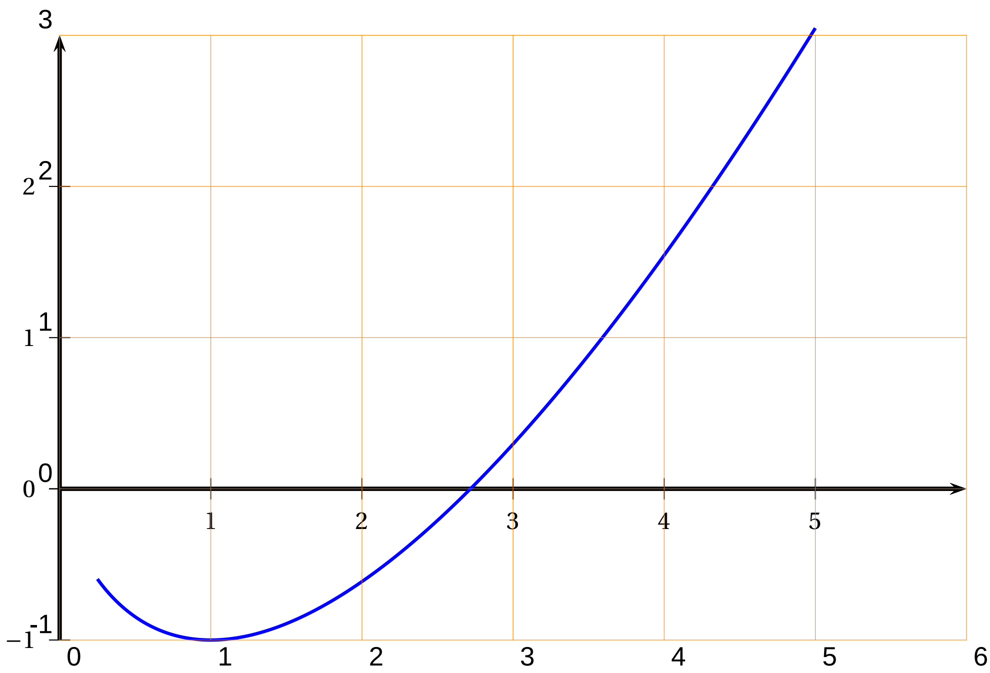
Une équation de $\mathscr{D}$ est donc $y = x - \mathrm{e}$.

b. Le coefficient directeur de la tangente égal au nombre dérivé est donc nul, soit $\ln(x) = 0 \iff x = 1$.

Le point B a pour abscisse 1 et donc pour ordonnée -1.

3. **a.**

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	e	3	4	5
$f(x)$	$-0,6$	$-0,8$	-1	$-0,6$	0	$0,3$	$1,5$	3



EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) **7 points**

1. $f(0) = 2$; $f(-1) = 3\text{e}^{-1} \approx 1,1$; $f(2) = 0$.
2. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur I et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -1\text{e}^x + (2-x)\text{e}^x = (1-x)\text{e}^x$.

   b. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.
   Donc sur $[-1 ; 1[$, $f'(x) > 0$;
   et sur $]1 ; 2[$, $f'(x) < 0$. La fonction f est donc croissante sur $[-1 ; 1[$ et décroissante sur $]1 ; 2[$.
3. **a.** La tangente est horizontale si le nombre dérivé est nul, soit :
   $f'(x) = 0 \iff (1-x)\text{e}^x \iff 1-x = 0 \iff x = 1$. Et $f(1) = 1\text{e}^1 = \text{e}$.
   A(1 ; e).

   b.
4. **a.** F est dérivable sur I et sur cet intervalle :
   $F'(x) = -1\text{e}^x + (3-x)\text{e}^x = (2-x)\text{e}^x = f(x)$.
   Donc F est une primitive de f sur I.

   b. $K = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\text{d}t = [F(t)]_0^2 = F(2) - F(0) = (3-2)\text{e}^2 - (3-0)\text{e}^0 = \text{e}^2 - 3$.
5. **a.** Voir la figure.

   b. Déterminer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième de la mesure $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2. Comme $-1 \leqslant x \leqslant 2 \iff -2 \leqslant -x \leqslant 1 \iff 2-2 \leqslant 2-x \leqslant 2-1 \iff 0 \leqslant (2-x) \leqslant 1$ et finalement en multipliant par le nombre positif e^x,
   $0 \leqslant (2-x)\text{e}^x \leqslant \text{e}^x$.
   Conclusion : la fonction f est positive (ou nulle) sur I et l'aire en unité l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\text{d}t$.
   On a vu que cette intégrale est égale à $\text{e}^2 - 3$ unités d'aire soit puisque 1 u. a. $= 3 \times 3 = 9$ cm^2, l'aire est égale à $9\left(\text{e}^2 - 3\right) \approx 39,50$ cm^2. (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure).

EXERCICE 4 : ANNEXE (à rendre avec la copie)