Baccalauréat technique de la musique et de la danse
Métropole juin 2012

Le candidat traitera trois exercices :

- Obligatoirement l'exercice 1
- Obligatoirement l'exercice 2
- Au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4

EXERCICE 1 **6 points**

On note I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 10\right]$. On désigne par ln la fonction logarithme népérien.
On note e le nombre réel vérifiant $\ln(\text{e}) = 1$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par

$$g(x) = \ln x - 1.$$

1. Résoudre, sur l'intervalle I, l'équation $g(x) = 0$.
2. Résoudre, sur l'intervalle I, l'inéquation $g(x) \geqslant 0$ et en déduire le tableau de signe de $g(x)$ pour tout réel x de l'intervalle 1.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par

$$f(x) = x(\ln x - 2).$$

1. Calculer la valeur exacte de $f(\text{e})$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle I, et vérifier que l'on a $f'(x) = g(x)$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$, pour tout réel x de l'intervalle I, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant (on arrondira les valeurs au dixième).

x	0,5	1	2	e	3,5	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$												

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2 **7 points**

Pour attirer la clientèle, un supermarché organise un jeu : pour tout passage en caisse, chaque client se voit remettre un ticket. Il gagne soit un paquet de bonbons soit un bon d'achat de 150 €, selon les modalités suivantes :

- 1^re^ étape : un grattage du ticket révèle soit une marque verte, soit une marque rouge.
  La marque est verte dans 35 % des cas.
- 2^e^ étape : le ticket est passé dans une borne qui indique le gain du client.
  — Si le ticket porte une marque verte, le client remporte un paquet de bonbons dans 90 % des cas et un bon d'achat de 150 € dans tous les autres cas.

— Si le ticket porte une marque rouge, le client remporte un paquet de bonbons dans 98 % des cas et un bon d'achat de 150 € dans tous les autres cas.

Tous les tickets ont été distribués.
À la sortie du magasin, on interroge un client au hasard. Chaque client a la même probabilité d'être choisi.
On note
V l'évènement « le client a eu un ticket avec une marque verte » ;
R l'évènement « le client a eu un ticket avec une marque rouge » ;
A l'évènement « le client a gagné un bon d'achat de 150 € » ;
B l'évènement « le client a gagné un paquet de bonbons ».

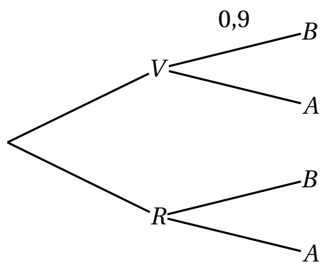
1. D'après l'énoncé :

a. Parmi les évènements V, R, A et B, lequel a $0,35$ pour probabilité ?

b. Donner $p(B)$, la probabilité que le client gagne des bonbons sachant que son ticket est R. rouge.

2. **a.** Calculer $p(A)$, la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement V est réalisé.

b. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités modélisant la situation étudiée :



3. Traduire l'évènement noté $V \cap A$ par une phrase. Calculer sa probabilité.

4. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est égale à $0,048$.

5. On sait que le client a gagné un bon d'achat de 150 €. Quelle est la probabilité qu'il ait eu un ticket portant une marge rouge ?

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

- On considère la gamme tempérée : l'octave est divisée en 12 demi-tons (DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI). Quand on monte d'un demi-ton, la fréquence de la note est multipliée par $q = 2^{\frac{1}{12}}$; une quinte correspond à 7 demi-tons.
- À chaque octave est associé un indice n entier, et les notes d'une octave portent l'indice de cette octave. Par exemple, la note LA_3 correspond à la note LA de l'octave d'indice 3, et la note LA_4 à la note LA de l'octave supérieure d'indice 4.
- log désigne la fonction logarithme décimal.
- Pour deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2 exprimées en Hertz, avec $f_2 > f_1$; , la différence de hauteur de ces notes exprimée en savarts est égale à $1\,000 \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$.
- On rappelle que lorsque deux entiers a et b ont le même reste dans la division euclidienne par 12, on dit que a est congru à b modulo 12 et on note $a \equiv b \quad \text{modulo } 12$.

Les fréquences demandées seront arrondies au dixième.
On considère le LA_3 de fréquence 440 Hz.

1. À partir du LA_3 on monte de 17 demi-tons.

a. Quelle est la note obtenue ?

b. Quelle est la fréquence de cette note ?

c. De combien de savarts est-on monté ? (on arrondira à l'unité).

2. À partir du LA_3, on monte de n quintes, (où n désigne un nombre entier) et on obtient la note DO. On cherche à déterminer la valeur de l'entier n.

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $7n \equiv 3 (\text{modulo} 12)$.

b. Compléter le tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n$ modulo 12						11						

c. En déduire la valeur de l'entier n.

3. On joue une note dont la fréquence est 311, 1 Hz.

On pose $q = 2^{\frac{1}{12}}$.

a. Donner une valeur approchée, arrondie au millième, de q^3, q^6 et q^9.

b. À partir du LA_3, de combien de demi-tons est-on descendu pour obtenir cette note ?

c. Quelle est la note obtenue ?

EXERCICE 3 Enseignement renforcé (au choix) **7 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ où l'unité graphique est de 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère le point M_1 d'affixe $z_1 = 1 + i$.

a. Placer le point M_1 dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Calculer le module du nombre complexe z_1 et déterminer un argument de z_1.

2. On considère le nombre complexe z_2 de module 2 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

On désigne par M_2 le point d'affixe z_2.

a. Construire le point M_2 dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

b. Écrire le nombre complexe z_2 sous la forme algébrique $a + ib$, où a et b sont des nombres réels.

3. a. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $z_1 \times z_2$.

b. En utilisant le résultat de la question 1. b., démontrer que le nombre complexe $z_1 \times z_2$ a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{11\pi}{12}$.

c. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.