J. Lubczanski, I. Lallier-Girot, J. Roux, R. Volsik

L'objectif de ce travail est d'étudier la fonction de **C** dans **C** définie par $f(z) = z^2$,
On nomme A et A' les images de z et z^2 dans le plan complexe, et F la transformation A → A'.
Cette étude va porter sur les positions du point A' lorsque le point A décrit une courbe donnée :
cela s'appelle un "lieu géométrique".
L'étude expérimentale consistera à observer et conjecturer certaines propriétés.
L'étude théorique consistera à chercher une démonstration de ces propriétés.

A - QUESTIONS PREPARATOIRES ***(sur papier avant la séance)***

Soit z un nombre complexe non nul : $z = x + iy$.

1. Démontrez qu'on a : $Re(z') = x^2 - y^2$ et $Im(z') = 2xy$
2. **a.** Calculer les carrés des nombres complexes $-2 - i$; -1 ; i ; $1 + 2i$
   b. Représentez dans un plan les images P, Q, R, S de ces nombres et les images P', Q', R', S' de leurs carrés.
   Quelles observations pouvez vous faire ?

B - ETUDE EXPERIMENTALE ***(sur ordinateur, avec compte rendu papier et impressions)***

Lancez l'application *Geogebra*.

1. **Construction de l'image d'un point**
   a. Créez un point libre A.
   b. Quelles sont les coordonnées de A' = F(A) ? Créez le point A'.
2. **Points invariants**
   a. Chercher expérimentalement à faire coïncider A et A'.
   b. Quelle conjecture pouvez vous faire sur les points invariants de f ?
3. **Image d'une droite donnée**
   a. – Créez les nombres a et b, en les fixant égaux à 1, puis la droite d'équation y = ax + b
   – Redéfinissez le point A comme point de cette droite.
   b. – Faites bouger A sur la droite, et observez comment varie la position de A'.
   – Créez le lieu de A' lorsque A décrit la droite, et coloriez le.
   – Faites bouger A sur ce lieu, et retrouvez les résultats de la question A-2.
   c. Quelle conjecture pouvez vous faire sur l'image par F de la droite $y = x + 1$?
4. **Image d'une droite quelconque**
   a. – Dans le menu "Editer", choisissez "Propriétés", sélectionnez b, cochez "affichez l'objet", et "appliquer".
   Le logiciel crée un curseur sur la figure, avec lequel vous pouvez faire varier la valeur de b :
   pour cela, sélectionnez b, et utilisez la souris ou les flèches du clavier.
   b. – Faites varier b, et observez comment varie le lieu de A'. Observez en particulier ses intersections avec les axes.
   – Créez un curseur pour a, et faites le varier : le lieu ressemble-t-il à une courbe connue ?
   – Quelles conjectures pouvez vous formuler pour l'image par F de la droite $y = ax + b$, selon les valeurs de a et b ?

Imprimez la feuille de travail et le protocole de construction, en ajoutant votre nom et prénom.

BONUS : *(pour ceux à qui il reste un peu de temps)* reprendre ce travail avec la parabole $y = (x - a)^2$ à la place de la droite ...

C - ETUDE THEORIQUE ***(sur papier : à rendre au prochain cours)***

1. **Points invariants**
   a. Résoudre l'équation équivalente à la condition $z' = z$.
   b. Quel est l'ensemble des points invariants par F ?
2. **Image d'une droite donnée**
   On pose $x' = Re(z')$ et $y' = Im(z')$. On suppose que A est un point de la droite $y = x + 1$
   a. Exprimer x' et y' uniquement en fonction de l'abscisse x de A.
   b. Exprimer x en fonction de x', et en déduire l'expression de y' en fonction de x'.
   c. A quelle courbe correspond cette relation ? Est-ce que cela démontre votre conjecture du B-3 ?
3. **Images dune famille de droites parallèles**
   Reprendre la méthode de la question précédente pour le cas des droites y = x + b, où b est un réel quelconque.
   Cela recoupe-t-il vos observations et vos conjectures du B-4 ?