∽ Baccalauréat blanc ∾ février 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A. R. O. C.
Pré-requis : forme algébrique d'un nombre complexe

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur, si et seulement si : $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel, si et seulement si : $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z \times \overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal . On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c et dont le centre du cercle circonsrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

Partie B : étude d'un cas particulier
On pose $a = 3+\mathrm{i}$; $b = -1+3\mathrm{i}$; $c = -\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Partie C : étude du cas général
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a \times \overline{a} = b \times \overline{b} = c \times \overline{c}.$$
2. On pose $\omega \overline{b} \times c - b \times \overline{c}$.
   - **a.** En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans la partie A, démontrer que ω est un imaginaire pur.
   - **b.** Verifier l'égalité $(b+c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = \omega$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\omega}{|b-c|^2}$.
   - **c.** En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
3. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   - **a.** Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.
   - **b.** Prouver que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
     (On admet de même que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier relatif).
   - **c.** Que représente le point H pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

a. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal . (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\,\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives $u_0,\ u_1,\ u_2$ et u_3.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2},\ f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver que la suite (u_n) converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. En déduire sa valeur.

EXERCICE 3 **5 points**

non spécialité mathématiques

Un parachutiste tombe à la vitesse de 55 m.s^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$ en secondes) à ce moment-là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $v(t)$ la vitesse en m.s^{-1} et $d(t)$ la distance parcourue en mètres à l'instant t.

On admet que y est solution de l'équation différentielle $v'(t) = 10\left(1 - \dfrac{v^2(t)}{25}\right)$: (E)

Par ailleurs, il a été établi que la distance parcourue à l'instant t est : $d(t) = \dfrac{1}{v(t)-5}$.

1. Expliquer pourquoi, pour un temps suffisamment grand, là vitesse du parachutiste est stabilisée.

On se propose donc de trouver une équation différentielle vérifiée par d et de la résoudre afin de déterminer la vitesse du parachutiste, lorsque celle-ci est stabilisée.

2. Questions de cours :

a. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' - my = 0$.

b. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' - my = b$.

3. **a.** Montrer que : $v(t) = \dfrac{1}{d(t)} + 5$.

b. Exprimer $v'(t)$ en fonction de $d(t)$ et de $d'(t)$.

c. Exprimer $v^2(t)$ en fonction de $d(t)$.

d. Prouver que y est solution de (E) si et seulement si, d est solution de l'équation : (E$'$) $\quad d' = 4d + 0,4$.

4. Donner la valeur de $v(0)$, puis calculer $d(0)$.
En déduire l'expression de la distance $d(t)$ parcourue à l'instant t.

5. Exprimer alors $v(t)$ en fonction de t ; puis calculer la limite de $v(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + kx\right) - x.$$

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k, dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A. Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{\text{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f_1.

Partie B. Étude et propriétés des fonctions f_k. (rappel : k est un par215amètre réel strictement positif)

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1+k\dfrac{x}{\text{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f_k.
   b. Établir que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   c. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\text{e}}$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
4. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_p$, et $\mathscr{C}_m$.
5. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

EXERCICE 5 **5 points**

Spécialité mathématiques

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
   a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad [7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad [7]$ équivaut à $x \equiv 4 \quad [7]$.
   c. Si a est un élément de A, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad [7]$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
   On considère l'ensemble $A_p = \{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.
   a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad [p]$.
   b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1 \quad [p]$.
   c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \quad [p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.
   d. Application : $p = 31$.
   Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1 \quad [31]$ et $3x \equiv 1 \quad [31]$.
   À l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation
   $6x^2 - 5x + 1 = 0 \quad [31]$.