Durée : 4 heures

Baccalauréat C Tahiti septembre 1983

EXERCICE 1

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et par $\overline{z}$ le conjugué de z.
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}^3$.

1. Quel est l'ensemble des nombres z tels que $f(z) = \overline{z}$?
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, on désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $f(z)$.
   Quel est l'ensemble des points M tels que le triangle $M\text{O}M'$ soit rectangle en O?
   Quel est l'ensemble des points M tels que M, O et M' soient alignés?
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes images par f des nombres complexes de module 1.
4. Déterminer et représenter dans le plan complexe les points M, d'affixe z telle que $f(z) = \text{i}$.

EXERCICE 2

Les vingt élèves d'une classe ont été pesés et chronométrés sur un parcours de 80 m. Les données sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

X : poids en kg	62	62	59	57	62
Y : temps en s	10,3	11	10,5	11,1	11,5
X : poids en kg	58	57	60	55	65
Y : temps en s	10	11,3	9,9	11,8	10,8
X : poids en kg	66	66	64	65	80
Y : temps en s	10,6	11,4	10,9	11,9	11,8
X : poids en kg	70	65	51	55	65
Y : temps en s	11,3	11,8	11,4	11,9	10,9

-

1. Construire le nuage de points correspondants.
2. Déterminer les équations des droites de régression.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

PROBLÈME

Pour tout entier naturel k non nul, on définit dans $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = 1 + \frac{x^k - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

On désigne par $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative des variations de f_k dans le repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan P (unité : 2 cm).

Partie A

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_k$ ont exactement 2 points communs, que l'on déterminera.

2. **a.** Étudier les variations de f_1.
   b. Construire $\mathscr{C}_1$. Préciser les tangentes aux points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ avec la droite d'équation $y = x$.

Partie B

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0, réel positif, et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f_1\left(u_n\right)$$

1. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 0$ ou si $u_0 = 1$?
2. Dans cette question, on suppose que $u_0 > 1$.
   a. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
3. Dans cette question, on suppose que $0 < u_0 < 1$.
   a. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

1. Étudier les variations de f_2.
2. Démontrer que $\mathscr{C}_2$ admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote.
3. Tracer $\mathscr{C}_2$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$. Préciser la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Partie D

On pose 2

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit f la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}$ par

   $$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

   (où ln désigne la fonction logarithme népérien).
   Calculer $f(-x) + f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.
2. Déduire de l'expression de $f'(x)$ le réel K.
3. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J.
4. Vérifier que $I = J + K$. En déduire les valeurs de I et J.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.
   Déduire de ce qui précède l'aire de la région de plan limitée par $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.