

∞ Baccalauréat Tahiti juin 1966 ∞
série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Un plan est rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy .

$(p ; q)$ étant un couple de nombres réels, à chaque point $C(p ; q)$ du plan on fait correspondre le barycentre, G , du système des trois points $A(q ; 0)$, $B(0 ; p)$, $C(p ; q)$ affectés de coefficients égaux à 1.

1. Calculer les coordonnées de G , en fonction de p et q .

Quel est l'ensemble (D) des points G lorsque le couple $(p ; q)$ varie?

Soit G_0 un point de (D) d'abscisse λ . Trouver l'ensemble (Δ) des points C qui ont pour correspondant le point G_0 ?

En déduire que l'application qui transforme C en G est la composée (ou produit) de deux transformations simples.

2. Étant donné un couple $(p ; q)$ fixe, montrer que l'ensemble des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(p^2 + q^2)$$

est un cercle (Γ) passant par O .

Quel est l'ensemble des cercles (Γ) lorsque le couple $(p ; q)$ varie?

EXERCICE 2

On donne, dans un repère orthonormé Ox, Oy , un cercle (C) de centre O , de rayon $a\sqrt{2}$. On désigne, par A et B les points dont les coordonnées sont $A(x = -a, y = a)$, $B(x = -a, y = -a)$, $a > 0$.

Soit P un point variable du cercle (C) distinct de A et B et défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) = \theta$.

Les droites PA et PB coupent respectivement Oy en M et N . On pose $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PA}$.

1. Montrer que

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{1 + \sqrt{2} \cos \theta}.$$

2. Calculer, en fonction de a et de θ , la mesure algébrique, u , sur Oy , du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Étudier la variation de u lorsque θ varie dans l'intervalle $(-\pi ; +\pi)$.

Construire le graphe de cette fonction.

En utilisant ce graphe, indiquer le nombre des points P du cercle (C) pour lesquels la distance MN est égale à la distance AB .

Donner une construction géométrique de ces points.

Calculer les valeurs de θ correspondantes, en degrés, minutes et secondes, à l'aide d'une table de logarithmes. (Donner seulement les valeurs comprises entre -180° et $+180^\circ$.)

3. Calculer, en fonction de θ , le rapport, z , des aires des triangles PMN et PAB.
Étudier la variation de z lorsque θ varie dans l'intervalle $[0 ; \pi]$. (Le graphe n'est pas demandé, mais on dressera le tableau de variation.)
4. Soit ω le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle PMN. Établir que

$$\overrightarrow{O\omega} = (1 - \lambda) \overrightarrow{OP}, \lambda \text{ étant le nombre réel déterminé au 1.}$$
 Calculer les coordonnées de ω en fonction de θ .
 Prouver que le cercle (Γ) a pour équation

$$(1 + \sqrt{2} \cos \theta)(x^2 + y^2) - 2a\sqrt{2}(x \cos \theta + y \sin \theta) + 2a^2(1 - \sqrt{2} \cos \theta) = 0.$$

Pour quelles valeurs de $\cos \theta$ le cercle (Γ) est-il tangent à l'axe Oz ?

Pour chacune de ces valeurs, on calculera l'abscisse du point de contact de (Γ) avec Ox .

5. Démontrer qu'il existe un point I de Ox ayant la même puissance pour tous les cercles (Γ) . En déduire :
- a. qu'il existe un cercle (I) centré en I et orthogonal à tous les cercles (Γ) ;
 - b. que les cercles (Γ) , déjà tangents à (C), sont tangents à un second cercle, (C') ;
préciser le rayon de (C') et l'abscisse de son centre.
6. Soit H la projection orthogonale de ω sur la droite (Δ) d'équation $x = a$. Calculer la longueur ωH en fonction de θ .
 Que peut-on dire du rapport $\frac{\omega O}{\omega H}$?
 Quelle est la nature de la courbe (L) sur laquelle se déplace ω ?
 Préciser les points d'intersection de (L) avec l'axe Oy ; montrer qu'en ces points, (L) est tangente au cercle (I).