**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C juin 1975 Tahiti

**EXERCICE 1**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par les équations :

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{si} & x < 0, & f(x) = 1\\ \text{si} & x \geqslant 0, & f(x) = x\text{e}^x\end{array}\right.$$

(où $\text{e}^x$ désigne l'exponentielle de base e de $x$).

1. Représenter graphiquement cette fonction après une étude succinte.
2. Déterminer par ses équations la fonction $g$ définie par : fX+l

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\text{d}t$$

(pour calculer $\displaystyle\int_a^b x\text{e}^x\,\text{d}x$, on utilisera la méthode d'intégration par parties.)

3. La fonction $g$ est-elle continue en $x = 0$ ?

**EXERCICE 2**

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{3-2u_{n-1}}$ pour tout naturel de $\mathbb{N}^*$, $u_0$ étant donné non nul.

1. Déterminer le réel $a$ non nul de telle sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n + a}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit une suite géométrique.
   Déterminer la raison $k$ de cette suite.
2. Discuter suivant les valeurs de $v_0$ la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son sens de variation.
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

**PROBLÈME**

**Première partie**

Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

À tout réel $k$ on associe l'application $\varphi_k$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout vecteur $\vec{v}_{(x,\ y)}$ associe $\vec{v'}_{(x',\ y')}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lll}2x' & = & (1+k)x + (1-k)y\\ 2y' & = & (1-k)x + (1+k)y\end{array}\right.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de $k$ le noyau de $\varphi_k$ et l'image de $\varphi_k$ avec précision.

**2.** Pour quelles valeurs de $k$, $\varphi_k$ est-elle une rotation vectorielle ? une symétrie vectorielle ?

Dans tous les cas, soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}(x,\ y)$ tels que $x = y$, et soit $\Delta$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}(x,\ y)$ tels que $x = -y$.

Montrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{P}$ et son image $\overrightarrow{v'}$ il existe un unique couple $\left(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right)$ de $\mathcal{D} \times \Delta$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l}\overrightarrow{v} & = & \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\\ \overrightarrow{v'} & = & \overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2}.\end{array}\right.$$

En déduire alors pour le cas où $\varphi_k$ est une symétrie vectorielle, l'axe et la direction de cette symétrie.

**Deuxième partie**

Soit $P$ le plan affine associé au plan vectoriel $\mathcal{P}$ de repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. À tout nombre réel $k$, on associe une application $f_k$ du plan $P$ dans lui-même, qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe $M'$ de coordonnées $\left(x', y'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l}2x' & = & (1+k)x + (1-k)y\\ 2y' & = & (1-k)x + (1+k)y\end{array}\right.$$

**1.** Montrer que $f_k$ est une application affine de $P$.

Pour quelles valeurs de $k$, $f_k$ est-elle bijective de $P$ dans $P$ ?

Définir alors $f_k^{-1}$ application réciproque de $f_k$.

Soit $E$ l'ensemble des applications affines bijectives $f_k$ de $P$ dans $P$.

Montrer que $E$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe commutatif isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ des réels non nuls.

**2.** Déterminer suivant les valeurs de $k$ les points invariants de $f_k$.

On suppose $k \neq 1$ et soit $D$ l'ensemble des points invariants.

Montrer que, lorsque $M$ n'est pas un point invariant, la droite $(MM')$ a une direction fixe que l'on précisera.

Si $H$ est le point d'intersection de $(MM')$ avec $D$ montrer que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.

**3.** Dans cette question on suppose $k = 3$ et on considère l'application $f_3$ soit $\text{A}_{(1\ ;\ 1)}$ et $\text{A}'_{(-1\ ;\ -1)}$ et un réel $\ell$ non nul.

Déterminer l'ensemble $F$ des points $M$ du plan $P$ dont la projection orthogonale $H$ sur $(\text{AA}')$ [soit sur $D$] est telle que :

$$HM^2 = \ell\,\overline{H\text{A}} \cdot \overline{H\text{A}'}$$

en cherchant son équation dans un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{I}\ ;\ \overrightarrow{J}\right)$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{D}$ et où $\overrightarrow{J}$ est un vecteur unitaire de $\Delta$.

$\mathcal{D}$ et $\Delta$ sont les droites vectorielles définies dans la première partie, **2.**

Donner avec précision la nature et les éléments de $F$.

Déterminer l'image $F'$ de $F$ par $f_3$ avec précision. Construire $F$ et $F'$ pour $\ell = -4$.