Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Tahiti

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par les équations :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{si} & x < 0, & f(x) = 1 \\ \text{si} & x \geqslant 0, & f(x) = x\text{e}^x \end{array}\right.$$

(où e^x désigne l'exponentielle de base e de x).

1. Représenter graphiquement cette fonction après une étude succinte.
2. Déterminer par ses équations la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\text{d}t$$

(pour calculer $\displaystyle\int_a^b x\text{e}^x\,\text{d}x$, on utilisera la méthode d'intégration par parties.)

3. La fonction g est-elle continue en $x = 0$?

EXERCICE 2

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{3 - 2u_{n-1}}$ pour tout naturel de $\mathbb{N}^*$, u_0 étant donné non nul.

1. Déterminer le réel a non nul de telle sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n + a}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit une suite géométrique.
   Déterminer la raison k de cette suite.
2. Discuter suivant les valeurs de v_0 la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son sens de variation.
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

PROBLÈME

Première partie

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

À tout réel k on associe l'application φ_k de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout vecteur $\vec{v}_{(x,\ y)}$ associe $\vec{v'}_{(x',\ y')}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x' & = & (1+k)x + (1-k)y \\ 2y' & = & (1-k)x + (1+k)y \end{array}\right.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de k le noyau de φ_k et l'image de φ_k avec précision.
2. Pour quelles valeurs de k, φ_k est-elle une rotation vectorielle ? une symétrie vectorielle ?

   Dans tous les cas, soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}(x,\ y)$ tels que $x = y$, et soit Δ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}(x,\ y)$ tels que $x = -y$.

   Montrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{P}$ et son image $\overrightarrow{v'}$ il existe un unique couple $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ de $\mathcal{D} \times \Delta$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{v} & = & \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\\ \overrightarrow{v'} & = & \overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2}.\end{array}\right.$$

   En déduire alors pour le cas où φ_k est une symétrie vectorielle, l'axe et la direction de cette symétrie.

Deuxième partie

Soit P le plan affine associé au plan vectoriel $\mathcal{P}$ de repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. À tout nombre réel k, on associe une application f_k du plan P dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe M' de coordonnées $\left(x', y'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl}2x' & = & (1+k)x + (1-k)y\\ 2y' & = & (1-k)x + (1+k)y\end{array}\right.$$

1. Montrer que f_k est une application affine de P.

   Pour quelles valeurs de k, f_k est-elle bijective de P dans P ?

   Définir alors f_k^{-1} application réciproque de f_k.

   Soit E l'ensemble des applications affines bijectives f_k de P dans P.

   Montrer que E muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe commutatif isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ des réels non nuls.
2. Déterminer suivant les valeurs de k les points invariants de f_k.

   On suppose $k \neq 1$ et soit D l'ensemble des points invariants.

   Montrer que, lorsque M n'est pas un point invariant, la droite (MM') a une direction fixe que l'on précisera.

   Si H est le point d'intersection de (MM') avec D montrer que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.
3. Dans cette question on suppose $k = 3$ et on considère l'application f_3 soit $\mathrm{A}_{(1\,;\,1)}$ et $\mathrm{A}'_{(-1\,;\,-1)}$ et un réel ℓ non nul.

   Déterminer l'ensemble F des points M du plan P dont la projection orthogonale H sur (AA') [soit sur D] est telle que :

$$HM^2 = \ell\,\overline{H\mathrm{A}}\cdot\overline{H\mathrm{A}'}$$

   en cherchant son équation dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{I}\ ;\ \overrightarrow{J}\right)$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{D}$ et où $\overrightarrow{J}$ est un vecteur unitaire de Δ.

$\mathscr{D}$ et Δ sont les droites vectorielles définies dans la première partie, **2.**
Donner avec précision la nature et les éléments de F.
Déterminer l'image F' de F par f_3 avec précision.
Construire F et F' pour $\ell = -4$.