Durée : 4 heures

Baccalauréat Tahiti juin 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Déterminer le module et l'argument de

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

Calculer $u = z^3$.

EXERCICE 2

1. Étudier les variations de la fonction

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

   Tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé dont l'unité est 1 cm.
2. Calculer l'aire comprise entre l'axe des x, les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ et la courbe.

EXERCICE 3

Soit un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ et un point A de Ox tel que $\overline{\mathrm{OA}} = 2a$ ($a > 0$).
On trace le cercle (C) de centre A et de rayon $R = a$ et l'on considère le point M de (C) défini par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}x}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \theta.$$

1. Établir l'équation de la tangente en M au cercle (C) en fonction de θ et a.
   En déduire les coordonnées du point B, intersection de cette tangente avec l'axe Oy.
2. On appelle (T) le cercle de centre B et de rayon BM. Montrer que (T) appartient à un faisceau linéaire de cercles, dont on précisera les éléments.
   On appelle (D) la polaire de B par rapport à (C).
   Montrer que (D) passe par un point fixe, que l'on déterminera.
   Lieu du pied de cette polaire lorsque θ varie.
3. On désigne par J le point de l'axe Ox d'abscisse $-a\sqrt{3}$.
   Quels sont les transformés de (T), (C) et BM dans l'inversion de centre J et de puissance $6a^2$?