∽ Baccalauréat Tahiti septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{2}\text{Log}\,|x-1| - \text{Log}|x+1| = 0.$$

II.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé Oxyz, on considère le point A, de coordonnées $+1$; -2 ; $+2$, et le vecteur $\overrightarrow{\text{V}}$, de composantes scalaires $+3$; $+2$; $+1$.
Écrire les coordonnées paramétriques d'un point M de la droite (D), menée par A et parallèle à $\overrightarrow{\text{V}}$.
En déduire les coordonnées du point où la droite (D) perce le plan $x\text{O}y$.
Calculer la distance de l'origine, O, à un point M quelconque de (D) ; en déduire la distance de O à la droite (D).

III.

On rappelle qu'une application $\mathscr{A}$ d'un ensemble E dans lui-même associe à tout x élément de E un élément de E appelé image de x.
$\mathscr{A}$ est dite bijective ou biunivoque si tout élément de E est l'image d'un élément unique de E.
Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et M un point de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.
On considère le cercle (C) tangent en O à $x'\text{O}x$ et opposé à M sur le cercle (C).

1. Montrer que les coordonnées, x' et y', de M$'$, quand M$'$ existe, sont données par

$$x' = -x, \quad y' = \frac{x^2}{y}.$$

On désigne par Π l'ensemble des points de P non situés sur les axes.
Montrer que la transformation θ qui, à M, associe M$'$ $[\text{M}' = \theta(\text{M})]$ est une application bijective de Π sur lui-même.
θ est-elle involutive ?

2. On désigne par H une homothétie de centre O et de rapport k, par S la symétrie par rapport à $x'\text{O}x$, par T la symétrie par rapport à $y'\text{O}y$.
Montrer que les produits $\theta \circ H$, $\theta \circ S$et $\theta \circ T$ sont commutatifs (on pourra faire un raisonnement analytique ou un raisonnement géométrique).

3. Si (C) est une courbe de Π, lieu d'un point M, l'ensemble des transformés $\text{M}' = \theta(\text{M})$ est une courbe, notée (C$'$), et appelée transformée de (C) par θ.
Que peut-on dire des transformées de deux courbes homothétiques par rapport à O ?
Si (C) admet $x'\text{O}x$ comme axe de symétrie, quelle propriété possède (C$'$) ?

4. On donne une droite (D) et l'on se propose d'étudier la transformée $\left(\Delta'\right)$ de $(\Delta) = \Pi \cap (\text{D})$.

a. Déterminer $\left(\Delta'\right)$ si (D) est parallèle à $x'\text{O}x$ ou si (D) passe par l'origine O.

b. Déterminer $\left(\Delta'\right)$ si (D) est parallèle à $y'\text{O}y$.

Soit P la parabole d'équation, $y = \dfrac{x^2}{2p}$;; quelle est la transformée de $\Pi \cap (\text{D})$?

c. (D) a pour équation $y = a(x+b),\ ab \neq 0$.
Déterminer $\left(\Delta'\right)$ par son équation et construire $\left(\Delta'\right)$.
$\left(\Delta'\right)$ admet une asymptote oblique, que l'on demande de construire à partir de (D).

5. On considère un point $\mathrm{M}_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ et son transformé par θ, $\mathrm{M}'_0\left(x'_0\ ;\ y'_0\right)$; soit M un point de coordonnées $\left(x_0+h\ ;\ y_0+k\right)$, qui a pour transformé M' dont les coordonnées sont désignées par x'_0+H et y'_0+K.
Calculer $\dfrac{K}{H}$ en fonction de $x_0,\ y_0,\ h,\ k$.
En déduire que, si une courbe passant par M_0 a, en ce point, une tangente, la courbe transformée a, au point M'_0, une tangente, dont la pente dépend de celle de la tangente en M_0.

NOTA. - Les questions **4.** et **5.** peuvent être traitées indépendamment des questions **2.** et **3.**