

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Tel Aviv ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} x = 0$ ,  $x$  étant l'inconnue.
2. Donner l'expression de  $\operatorname{tg} 2x$  en fonction de  $\operatorname{tg} x$ , puis celle de  $\operatorname{tg} 4x$  en fonction de  $\operatorname{tg} x$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $y^4 - 10y^2 + 5 = 0$ .
4. En utilisant les trois questions précédentes donner des valeurs numériques approchées de  $\operatorname{tg} \left(k \frac{\pi}{5}\right)$ , pour  $k = 1, 2, 3, 4$ .  
(Le candidat indiquera éventuellement l'instrument - règle ou table - qu'il a utilisé pour faire le calcul demandé.)

EXERCICE 2

1. Donner une définition de la fonction logarithme népérien.
2. Montrer que, quels que soient les réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ , on a

$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_a^b \frac{1}{t} dt < \frac{1}{a}(b-a).$$

3. Montrer que pour tout entier strictement positif  $n$  on a

$$\frac{1}{n+1} < \operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n < \frac{1}{n}$$

(Le symbole  $\operatorname{Log}$  désigne le logarithme népérien.)

4. Dédurre de ce qui précède que

$$\operatorname{Log}(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

5. Donner une valeur de  $n$  pour laquelle

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 10.$$

PROBLÈME

Soit un plan affine  $P$  rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ; on considère l'application  $T$  de  $P$  dans  $P$  qui à chaque point  $M(x; y)$  fait correspondre le point  $M'(x'; y')$  par les relations :

$$\begin{cases} x' &= a + \alpha x + \beta y \\ y' &= b + \gamma x + \delta y \end{cases}$$

( $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des réels).

Partie A

1. Montrer que l'application  $T$  est définie par la donnée des images des trois points  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$  et  $B(0; 1)$ .

2. On considère le point  $C(c; d)$  et on donne les images par  $T$  des trois points  $O, A$  et  $C$ .  
Peut-on ainsi définir  $T$  quel que soit le point  $C$  choisi dans le plan?
3. À quelle condition la donnée de trois points du plan et de leurs images définit-elle une application affine de ce plan dans lui-même? Pouvait-on le prévoir?

### Partie B

1. Écrire la condition pour que  $T$  ait un point invariant et un seul. Écrire les conditions pour que  $T$  ait une droite de points invariants.
2. **a.** On donne les images  $O'(m; n), A'(2; 3)$  et  $B'(2; 5)$  des trois points  $O, A, B$ .  
Discuter suivant la position du point  $O'$  dans le plan le nombre de points invariants de l'application  $T$  ainsi définie.
- b.** Répondre à la même question lorsque,  $A'$  restant inchangé, on prend le point  $B'$  de coordonnées  $(2; 7)$ . Montrer que, dans ce cas-là, si  $O'$  décrit une droite  $\Omega$  l'application  $T$  admet une droite  $\Delta$  de points invariants et que cette droite  $\Delta$  passe par un point fixe  $\omega$  lorsque  $O'$  décrit  $\Omega$ .

### Partie C

Plus généralement on choisit  $O'(m; n), A'(2; 3)$  et  $B'(p; q)$  comme images de  $O, A$  et  $B$ .

1. Écrire la condition liant les coordonnées de  $O'$  et  $B'$  pour que  $T$  n'ait pas un point double unique.
2. Cette condition étant réalisée, montrer que  $O'$  doit être choisi sur une droite fixe  $\Omega$  si l'on veut que  $T$  possède une droite  $\Delta$  de points invariants.
3.  $O'$  étant choisi sur  $\Omega$  montrer que  $B'$  doit être pris sur une droite  $D$  parallèle à  $\Omega$  pour que  $T$  ait une droite  $\Delta$  de points invariants.  
Le point  $O'$  peut-il être pris quelconque sur  $\Omega$ ?
4. Une droite quelconque du plan peut-elle être une droite  $\Delta$  pour un choix convenable de  $O'$  et de  $B'$ ?