Durée : 4 heures

Baccalauréat C Territoires d'Outre-Mer juin 1970

EXERCICE 1

Étant donné deux entiers positifs a et b, on désigne par d et m leur plus grand diviseur commun et leur plus petit commun multiple.
Déterminer, en fonction de d et m, le plus grand diviseur commun et le plus petit commun multiple des trois nombres a^2, ab et b^2.

EXERCICE 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$, on considère la transformation ponctuelle qui, à un point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = 3\text{i}z - 9 - 3\text{i}.$$

1. Quelle est la nature de cette transformation ?
   Quel est son point double, S ?
2. Déterminer les transformés
   a. du cercle (C) ayant pour centre le point d'affixe $1 - 3\text{i}$ et pour rayon 1 ;
   b. de la droite d'équation $x = 1$.

EXERCICE 3

Le nombre a étant un réel positif donné, on considère la fonction f_a définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_a(x) = \text{e}^x - a(x+1)$$

et sa courbe représentative, (C_a).
À chaque nombre a on associe ainsi une fonction f_a et une courbe (C_a) d'équation $y = f_a(x)$ tracée dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Trouver, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de

   $$\frac{\text{e}^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}.$$

   Étudier les variations de la fonction f_1 et construire la courbe (C_1) d'équation $y = \text{e}^x - (x+1)$.
   Cette courbe (C_1) admet une asymptote (D_1), dont on donnera l'équation.
   En tout point M de coordonnées $(\alpha~;~\beta)$ pris sur la courbe (C_1), il existe une tangente, dont on établira l'équation.
   Cette tangente rencontre l'asymptote (D_1) en un point N ; les projections orthogonales de M et N sur l'axe $x'\text{O}x$ étant désignées respectivement par M' et N', montrer que $\overline{M'N'}$ est un nombre constant.
   En déduire une construction simple de la tangente en M.
2. Le nombre a ayant une valeur strictement positive quelconque, étudier les variations de la fonction f_a et donner l'allure générale de la courbe représentative.
   Chaque courbe (C_a) admet une asymptote (D_a), que l'on précisera. La propriété concernant $\overline{M'N'}$ définie, à la première question est vérifiée pour une courbe (C_a) quelconque. Le montrer.

3. Chaque fonction f_a admet un minimum q pour une valeur de x désignée par p ; on désigne par A le point, sur la courbe (C_a) correspondante, ayant pour coordonnées $(p\,;\,q)$ et l'on considère l'ensemble E de ces points A. (On ne cherchera pas à construire ni à préciser cet ensemble E.)

   Il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{R}'$ des nombres réels strictement positifs et l'ensemble E. On définit dans E une loi de composition interne, notée $\star$, de la manière suivante : nous dirons que le point A$'$ d'abscisse p' est le composé des points A_1 et A_2 d'abscisses respectives p_1 et p_2, si, et seulement si, $p_1 + p_2 = p'$. On note $A_1 \star A_2 = A'$.

   Montrer qu'il existe un isomorphisme entre l'ensemble $\mathbb{R}'$ muni de la loi multiplicative et l'ensemble E muni de la loi $\star$. Que peut-on en conclure pour la structure de l'ensemble E muni de cette loi $\star$?

4. Considérons, sur une courbe (C_a), le point M d'abscisse α et le point K d'abscisse $\alpha - 1$; N est le point où la tangente en M rencontre (D_a) et R est le point d'abscisse α sur (D_a).

   Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par les segments MR, RN, NK et par l'arc de courbe KM (l'unité d'aire est l'aire du carré de côté $\left|\vec{\imath}\right|$).

   Calculer ensuite l'aire du domaine limité par les segments MN, NK et par l'arc KM. Vérifier que cette aire est indépendante de la courbe (C_a) considérée.