Durée : 4 heures

Baccalauréat C Togo juin 1969

EXERCICE 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$ on considère les points M d'affixe i, P d'affixe 1 et Q d'affixe $2+\mathrm{i}$.
Déterminer, sous la forme $Z = az + b$, la similitude S dans laquelle le vecteur $\overrightarrow{M\mathrm{O}}$ a pour transformé le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.
Calculer l'affixe du centre de la similitude, le rapport et l'angle de similitude.

EXERCICE 2

Dans un plan on donne un cercle (C), de centre O, un point A intérieur à (C) et la polaire (Δ) de A par rapport à (C).
D'un point M variable sur (Δ) on mène les tangentes MT et MT' au cercle (C), T et T' étant les points de contact.
Transformer la figure par l'inversion de pôle A qui conserve le cercle (C).
(t) et (t') étant les inverses des droites MT et MT', trouver l'ensemble des points communs à (t) et (t') lorsque M décrit (Δ).

PROBLÈME

Soit, dans un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$, la parabole (P) d'équation

$$(1) \qquad y^2 = 2x$$

et, sur cette parabole, un point variable, M, d'ordonnée $\lambda\ (\lambda \neq 0)$.

1. Exprimer en fonction de λ l'abscisse de M et le rapport $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ au point M.

   Déterminer en fonction de λ les équations de la tangente MT en M à (P), de la normale MN et de la droite (Δ_λ) symétrique de MN par rapport à la parallèle à $\mathrm{O}y$ menée par M.

   N et Q étant respectivement les intersections de MN et (Δ_λ) avec $\mathrm{O}x$, calculer QN.

   En déduire que (Δ_λ) est la transformée de MN dans une transformation produit d'une symétrie et d'une translation, toutes deux indépendantes du choix de M sur (P).

   Pour quelles valeurs de λ les droites MT et (Δ_λ) sont-elles confondues ? Soit M_1 et M_2 les points correspondants.
2. Montrer que les droites (Δ_λ) passant par un point $L_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ donné sont déterminées par une équation en λ de la forme

$$(2) \qquad \lambda^3 + p\lambda + q = 0.$$

   Écrire la relation entre x_0 et y_0 exprimant que l'équation (2) admet une racine double (on pourra établir ou admettre que cette relation est donnée par $4p^3 + 27q^2 = 0$).
3. Soit le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}L}$, de composantes 3

$$X = \frac{3}{2}\lambda^2 - 1, \quad Y = \lambda^2$$

   et le vecteur $\overrightarrow{LH}$, dérivé de $\overrightarrow{\mathrm{O}L}$ par rapport à λ.

   Montrer que L appartient à (Δ_λ) et que $\overrightarrow{LH}$ est porté par (Δ_λ).

4. Construire la courbe d'équation

$$y = \sqrt{\frac{8}{27}(x+1)^3}$$

et l'ensemble (E) d'équation

$$27y^2 = 8(x+1)^3.$$

Montrer que le point L défini au 3 appartient à (E) et, sans nouveau calcul, que (Δ_λ) est tangente à (E) en L.

Montrer, en utilisant un résultat du 1, que (E) et (P) sont tangents en deux points, que l'on précisera.