Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Togo juin 1972 ∾

EXERCICE 1

Montrer par récurrence, que, pour tout entier naturel n, le nombre $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 2

Soit a et b deux nombres complexes. Quelle relation doit lier a et b pour que les nombres complexes az et $\dfrac{\overline{z}}{b}$ aient, pour tout z complexe,

1. même module ;
2. des arguments opposés ?

   Lorsque ces deux conditions sont remplies simultanément que peut-on dire des nombres az et $\dfrac{\overline{z}}{b}$?

   Application : Soit $a = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer b pour que les deux conditions ci-dessus soient vérifiées.

   N.B. - On rappelle que $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

PROBLÈME

Soit la fonction f_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f_a(x) = ax + 1 + \text{Log}\,(ax)$$

(a est un paramètre réel et Log désigne la fonction logarithme népérien).

Partie A

1. f_a existe-t-elle quel que soit a ? (Dans toute la suite a est supposé tel que f_a existe.) Quel est le domaine de définition de f_a ?
2. Soit (C_a) la courbe représentative de f_a en repère orthonormé. Montrer que (C_a) admet une direction asymptotique ; (C_a) admet-elle une asymptote oblique ?
3. Montrer que, pour tout $a \neq 0$ et pour tout x tel que $f_a(x)$ soit défini, on a $f\,a(x) = f_{-a}(-x)$.
   Par quelle transformation géométrique simple (C_{-a}) se déduit-elle de (C_a) ?
4. Étudier la fonction f_2 et tracer (C_2) et (C_{-2}). Montrer à cette occasion que l'équation $f_2(x) = 0°$ admet une racine comprise entre $\dfrac{1}{4\mathrm{e}}$ et $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

Partie B

Soit E l'ensemble des courbes (C_a) quand a parcourt $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^\star$. On définit dans E une loi de composition (notée $\star$) par $(C_a) \star (C_b) = (C_{ab})$.

1. Montrer que $(E,\ \star)$ possède une structure de groupe abélien.
2. Montrer que $(E,\ \star)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{R}^\star,\ \times\right)$.
3. Peut-on définir, dans E, une loi de composition (notée $\perp$ par $(C_a) \perp (C_b) = (C_{a+b})$?

4. Déterminer tous les couples $(a,\ b)$, d'entiers relatifs, tels que

$$(C_a) \star (C_b) = (C_{a+b})\,.$$

Partie C

Soit T_λ la transformation du plan dans lui-même, qui, à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, défini par

$$x' = \frac{1}{\lambda}x \quad \text{et} \quad y' = y, \quad \lambda \in \mathbb{R}^\star.$$

1. Reconnaître la transformation T_λ. Montrer que l'ensemble, $\mathcal{T}$, des transformations T_λ $\left(\lambda \in \mathbb{R}^\star\right)$, muni de la loi de composition des applications, possède une structure de groupe abélien isomorphe à $\left(\mathbb{R}^\star,\ \times\right)$.

2. Quelle est la transformée par T_λ d'une courbe (C_a) ?

3. Montrer que T_λ est une bijection de E dans E. [E est l'ensemble des courbes (C_a)].

4. A-t-on l'égalité

$$T_\lambda\left(C_a \star C_b\right) = T_\lambda\left(C_a\right) \star T_\lambda\left(C_b\right)?$$

Si $a + b \neq 0$, a-t-on l'égalité

$$T_\lambda\left(C_a \perp C_b\right) = T_\lambda\left(C_a\right) \perp T_\lambda\left(C_b\right)?$$

5. Montrer que $(\mathcal{T},\ \circ)$ et $(E,\ \star)$ sont isomorphes.

N. B. - On donne pour valeurs décimales approchées des nombres e et Log 2 les nombres $2,7$ et $0,7$.