Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Togo ∽

EXERCICE 1

Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé, on considère l'application S qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\overline{z} + i$$

(où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z).
Démontrer que S est une similitude inverse dont on précisera le rapport k, le centre C et l'axe D.

EXERCICE 2

1. Déterminer une primitive de la fonction numérique de variable réelle f définie par :

$$f(x) = x\text{Log}\,\frac{1}{x}$$

   où Log désigne la fonction logarithme népérien.
2. On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in N^\star}$ définie par :

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   pour tout entier naturel non nul n.
   Déterminer u_n pour tout entier naturel non nul n, et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Soit P le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f et g les endomorphismes de P ayant pour matrices respectives dans cette base :

$$M_f = A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_g = B = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Partie A

1. Donner dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les matrices des endomorphismes f_2, f_3 et f_n pour tout entier naturel non nul n.
2. Démontrer que f est bijectif et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
3. Reprendre les questions précédentes avec g.
4. Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls $(p ; q)$ tels que l'endomorphisme $f^p + g^q$ ne soit pas bijectif. Donner, pour l'un des couples trouvés, le noyau et l'image de $f^p + g^q$.

Partie B

Soit E l'ensemble des endomorphismes de P de la forme $af + bg$ (a et b réels).

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace ($\mathscr{L}$(P), +, .) des endomorphismes de P.

   Donner une base de E.
2. Démontrer que tout endomorphisme non nul de E est bijectif.
3. Reconnaître les rotations vectorielles de E.
4. Y a-t-il des symétries vectorielles dans E ? Justifier la réponse.
5. Donner la matrice de $h = f + g$ dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

   Donner les matrices de h^2, de h^3 et en déduire par récurrence celle de h^n, pour tout entier naturel non nul n.

Partie C

Soit F l'ensemble des matrices M obtenues comme produit des matrices A ou B, A et B étant définies au début de ce problème.
(Exemple : $M = AABBBAB$ est un élément de F).
Une matrice M appartient donc à F si et seulement si M peut s'écrire sous la forme :

$$M = C_1 C_2 \cdots C_i \cdots C_n$$

avec n élément de $\mathbb{N}^\star$ et $C_i = A$ ou $C_i = B$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ un élément de F.
On admettra que a, b, c, d sont des entiers naturels.

1. Calculer le déterminant de M.

   Démontrer que si a, b, c et d sont tous non nuls, a et b d'une part, c et d d'autre part sont premiers entre eux.

   Application : $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ est-elle élément de F ?
2. Démontrer, par récurrence sur le nombre de facteurs de M, que :
   — si $C_1 = A$, alors M est telle que $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$
   — si $C_1 = B$, alors M est telle que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$

   Application : $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle élément de F ?
3. Déduire de la question précédente que la décomposition de M en produit de C_i est unique.

   Application : Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer en décomposant M en produit de C_i que M est élément de F.