Baccalauréat C Togo juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 405 \\ 3m & = & ab, \quad m = p.p.c.m.(a, b) \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est continue à gauche de 0. Est-elle continue en 0 ?
2. Étudier les variations de f et montrer que f est dérivable à gauche de 0.
   Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire de la portion de plan définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & \leqslant & x & \leqslant & \epsilon \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right. \quad \text{avec } a < \epsilon \text{ et } \epsilon < 0$$

   Soit $S(a,\ \epsilon)$ cette aire. Montrer qu'elle admet une limite lorsque ϵ tend vers 0 ; soit S_a cette limite.
   S_a admet-elle une limite lorsque a tend vers moins l'infini ?

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

Soit P le plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathrm{P}}$.
Soit $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ une base directe de P et $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ un repère de P note (R) d'axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.
À l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \longmapsto Z = -\mathrm{i}z + (1 - \mathrm{i})\overline{z}$$

correspond la transformation T du plan qui à m, d'affixe z, associe M d'affixe Z.

1. Exprimer les coordonnées X et Y de M en fonction de celles x et y de m.
   Vérifier que le milieu I de (mM) appartient à une droite fixe que l'on précisera, et que si m est distinct de M, la droite (mM) a une direction fixe.
   En déduire la nature de la transformation T.
2. **a.** Soit (R') le nouveau repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'}\right)$ défini dans P par :

$$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u'}\right) = \alpha, \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'}\right)$$

   Montrer que les affixes z et z' d'un même point m dans les repères (R) et (R') sont liées par la relation :

$$z' = z(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

Exprimer en fonction de z' et $\overline{z'}z'$, l'affixe Z' (dans le repère (R')), de l'image M de m par la transformation T.

b. On prend $\alpha = -\dfrac{\pi}{8}$. Montrer que :

$$Z' - \mathrm{i}z' - \mathrm{i}\sqrt{\overline{Z'z'}}.$$

Calculer les coordonnées X' et Y' du point M en fonction des coordonnées x' et y' de m dans le repère (R').

Soit (γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

Quelle est dans (R') l'équation de l'image $(\Gamma) = T(\gamma)$?

Quelle est la nature de (Γ) ?

Dessiner (γ) et (Γ) sur une même figure. Préciser quels sont leurs points communs en s'appuyant sur la nature géométrique de T.

Partie B

On associe à tout couple $(a\,;\,b)$ de nombres complexes l'application $f_{a,\,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_{a,b}(z) = az + b\overline{z}.$$

1. Mettre $(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z) - z$ sous la forme $Az + B\overline{z}$, A et B étant deux constantes complexes.

Démontrer que $Az + B\overline{z}$ est nul pour tout z, si et seulement si, $A = B = 0$ (on pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i).

Traduire alors par un système S de deux relations entre a, b, $\overline{a}$ et $\overline{b}$ la condition pour que $f_{a,b}$ soit involutive.

Que deviennent ces relations pour $b = a$, et pour $b \neq 0$?

Vérifier que les valeurs $a = -\mathrm{i}$ et $b = 1 - \mathrm{i}$ utilisées dans la première partie conviennent dans ce dernier cas.

2. Dans cette question, $f_{a,b}$ est supposée quelconque, involutive ou non.

On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que l'application $f_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est linéaire.

On prend B = (1, i) comme base de $\mathbb{C}$; calculer $f_{a,b}(1)$ et $f_{a,b}(\mathrm{i})$.

b. Soit φ une application linéaire quelconque de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par sa matrice $H = \begin{pmatrix} p & s \\ r & q \end{pmatrix}$ relativement à B, p, q, r, s étant quatre réels.

Démontrer qu'il existe une application $f_{a,b}$ qui coïncide avec φ ; à cet effet, on calculera $\varphi(\mathrm{i})$ et $\varphi(1)$ et l'on exprimera a et b au moyen de p, q, r, s.

c. Déduire alors du système S de relations trouvées précédemment, un système de relations entre p, q, r, s, traduisant la condition pour que φ soit involutive.

Retrouver directement ces relations en calculant $H^2 H \times H$.