Baccalauréat C Togo juin 1979

EXERCICE 1 **4 points**

On considère dans le plan affine euclidien E, le carré (A, B, C, D) de diagonales [A, C] et [B, D]. Soit I le point de E défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

1. Déterminer trois réels m, n, p, tels que I soit le barycentre des points A, B, D affectés des coefficients respectifs m, n, p.
2. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que :

$$3\overrightarrow{M\mathrm{A}}^2 = 2\overrightarrow{M\mathrm{B}}^2 + 2\overrightarrow{M\mathrm{D}}^2.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que :

$$2\overrightarrow{M\mathrm{A}}^2 + \overrightarrow{M\mathrm{B}}^2 = \overrightarrow{M\mathrm{C}}^2 + 2\overrightarrow{M\mathrm{D}}^2$$

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'ensemble A des entiers naturels n tels que si l'on divise n par p on obtient pour reste $p-1$, avec $p \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Déterminer le plus petit élément de A.

PROBLÈME **12 points**

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
À tout couple de points M de coordonnées $(x~;~y)$ et M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ on associe le point noté $M \star M'$ de coordonnées $(xx' + 4yy'~;~xy' + yx')$

$$(M~;~M') \longmapsto M \star M'$$

On définit ainsi une loi de composition interne dans P notée $\star$.

Partie A (4 points)

1. Montrer que $\star$ est associative.
   (P, $\star$) est-il un groupe commutatif ?
2. Déterminer les éléments de P inversible pour $\star$.
3. Soit H la courbe d'équation $x^2t - 4y^2 - 1 = 0$.
   Représenter H et démontrer que $(H, \star)$ possède une structure de groupe commutatif.

Partie B (4 points)

Soit I un point fixé de P de coordonnées $(a~;~b)$.
On définit une application f_{I} du plan P dans lui-même par :

$$f_{\mathrm{I}}(M) = M' = \mathrm{I} \star M.$$

1. Montrer que f_{I} est une application affine,
   Comment doit-on choisir I pour que f_{I} soit bijective ?

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_{I} ; discuter.
3. Déterminer I pour que f_{I} soit une involution.
   Préciser la nature et les caractéristiques de chacune des applications obtenues.
4. On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f_{I} bijectives. Démontrer que $(\mathscr{F}, \circ)$ possède une structure de groupe commutatif.

Partie C (4 points)

Soit φ_1 l'endomorphisme associé à f_1.

1. Déterminer une base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ du plan vectoriel associé à P telle que la matrice de φ_1 dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ $\quad (\alpha\ ;\ \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) de réels définies par u_0, v_0 et les relations de récurrence

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n &=& u_{n-1} + 4v_{n-1}\\ v_n &=& u_{n-1} + v_{n-1}\end{array}\right.$$

   Donner en fonction de u_0, v_0 et n les valeurs de u_n et v_n.