∽ Baccalauréat C Togo juin 1990 ∽

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Pour tout entier naturel n, on définit le réel u_n par :

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\frac{5}{4} - \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de u_n (on ne cherchera pas à calculer u_n).
2. On admet que : $u_0 = \dfrac{4\pi}{3}$.

   Démontrer que : $u_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.
3. **a.** Transformer la somme $\cos(n+2)x + \cos nx$ en un produit de cosinus.

   b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :

   $$u_n + u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Déterminer S_n en fonction de n, puis la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (0 ; T, h On considère la parabole ($\mathscr{P}$) d'équation :

$$y = x^2.$$

1. Déterminer les coordonnées du foyer F de ($\mathscr{P}$) .
2. Démontrer que par tout point M du plan de coordonnées $(a\ ;\ b)$ telles que $b < a^2$, on peut mener deux tangentes à ($\mathscr{P}$).

   On désigne par N_1 et N_2 les points de contact.

   Démontrer que N_1 et N_2 ont pour abscisses respectives :

   $$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b} \quad \text{et} \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - b}.$$
3. Démontrer que si les droites (FN_1) et (FN_2) sont orthogonales alors le point M appartient à la courbe ($\mathscr{C}$) d'équation :

   $$16y^2 + 24y - 16x^2 + 1 = 0.$$
4. Démontrer que ($\mathscr{C}$) est une hyperbole et vérifier que F est un foyer de ($\mathscr{C}$).
5. Tracer les courbes ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{C}$) dans un même repère.

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b et une fonction e définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \epsilon(x) = 0.$$

2. Étudier les variations de f (dérivée, signe de la dérivée, limites aux bornes de l'ensemble de définition).
3. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Démontrer que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote oblique Δ et étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et Δ. Tracer $(\mathscr{C})$ et Δ.

Partie II

Soit g_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + m\left(x^2 + 4x + 5\right)\text{e}^{-x} \quad (m \text{ paramètre réel}).$$

1. Déterminer $g'_m(x)$ et démontrer que le nombre de solutions de l'équation $g'_m(x) = 0$ est donné par le nombre de solutions de l'équation $m = h(x)$ où h est une fonction que l'on déterminera.
2. Étudier les variations de h et en déduire suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $g'_m(x) = 0$.
3. On suppose dans cette question que l'équation $g'_m(x) = 0$ a au moins une solution. Soit α une de ces solutions et M_α le point de coordonnées $\left(\alpha,\ g_m(\alpha)\right)$.
   Démontrer que M_α est un point de la courbe $(\mathscr{C})$ définie au 1. du problème.

Partie III

On suppose dans cette partie que $m = \dfrac{1}{2}$.
On pose $g_{\frac{1}{2}} = g$.
On a donc : $g(x) = x + \dfrac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 5\right)\text{e}^{-x}$.

1. Démontrer que l'équation $g'(x) = 0$ possède une seule solution α_0 et que $\alpha_0 \in]-2 ; -1[$.
2. Étudier les variations de g (signe de $g'(x)$, limites aux bornes).

Partie IV

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α_0 (α_0 défini au III. 1.

1. Démontrer que α_0 est tel que :

$$\alpha_0 = -\sqrt{2}\text{e}^{\frac{\alpha_0}{2}} - 1.$$

2. On définit la fonction φ sur $[-2 ; -1]$ par :

$$\varphi(x) = -1 - \sqrt{2}\text{e}^{x2}.$$

   Démontrer que si a et b sont deux réels de l'intervalle $[-2 ; -1]$, on a : 1

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\text{e}}}|b - a|.$$

3. **a.** Démontrer que si :

$$x \in [-2\,;\,-1] \quad \text{alors} \quad \varphi(x) \in [-2\,;\,-1].$$

b. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [-2\,;\,-1]$ et

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^\star : u_{n+1} = \varphi\left(u_n\right).$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha_0| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha_0|$ et que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha_0$.

c. Déterminer une valeur $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geqslant n_0$ alors u_n est une valeur approchée de α_0 à 10^{-3} près.