Durée : 4 heures

Baccalauréat C Toulouse juin 1970

EXERCICE 1

Calculer les restes, dans la division par 7, des puissances successives de 5.
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $5^{6n}+5^{n}+2$ est-il un multiple de 7 ?

EXERCICE 2

Calculer, pour x réel strictement positif, l'intégrale définie

$$\int\left(-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

On considère la fonction f

$$x\longmapsto\int_1^x\left(-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\quad(x\in\mathbb{R},\ x>0)$$

1. Étudier le sens de variation de f ; construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Étudier, en utilisant ce qui précède, le sens de variation de la fonction

$$g : x\longmapsto \mathrm{e}^{(1-x)\mathrm{Log}\,x},\ (x\in\mathbb{R}).$$

Préciser les limites de cette fonction aux bornes de l'intervalle de définition.
(La courbe représentative de g n'est pas demandée.)

EXERCICE 3

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A et B de coordonnées respectives $(+1\ ;\ 0)$ et $(-1\ ;\ 0)$ et le cercle (C) de diamètre AB. On pose $(\mathrm{P}') = (\mathrm{P}) - \{O\}$.

1. Soit k un nombre réel strictement positif. On considère la transformation ponctuelle T_k qui au point m' de (P′) associe le point M de (P′) défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\left(\mathrm{OA},\ \overrightarrow{\mathrm{O}m'}\right) & = & \left(\overrightarrow{\mathrm{O}M},\ \mathrm{OA}\right)\\ \mathrm{O}m'\cdot\mathrm{O}M & = & k.\end{array}\right.$$

Montrer que T_k est le produit de deux transformations simples.
Exprimer le nombre complexe Z, affixe du point M, en fonction du nombre complexe z', affixe du point m'.

2. $\mathscr{H}_k$ étant l'homothétie de centre O et de rapport k, on considère la transformation ponctuelle $\mathscr{T}$ de (P′) dans (P′) définie par

$$\mathscr{T} = T_k\circ\mathscr{H}_k$$

   a. Montrer que $\mathscr{T} = T_1$ et que, si m est un point de (P′) de coordonnées $(x\ ;\ y)$, le point $M=\mathscr{T}(m)$ a des coordonnées $(X\ ;\ Y)$ définies par

$$X=\frac{x}{x^2+y^2}\quad\text{et}\quad Y=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

b. T_k et $\mathscr{H}_k$ sont-elles commutables (c'est-à-dire telles que l'on ait $T_k \circ \mathscr{H}_k = \mathscr{H}_k \circ T_k$? Montrer que T est involutive.

c. Trouver les points doubles de $\mathscr{T}$.

3. On donne un cercle (Γ). Déterminer l'homologue $\left(\Gamma'\right)$ de (Γ) par $\mathscr{T}$. Donner une solution géométrique ou analytique, au choix.

4. Montrer que les cercles invariants par $\mathscr{T}$ forment deux faisceaux linéaires conjugués, l'un d'eux admettant A et B comme points limites.

5. Quand m décrit une droite (D) passant par O, déterminer l'ensemble des points $M = \mathscr{T}(m)$ et l'ensemble (H) des points, I, milieux de mM. Lorsque (H) est une hyperbole, préciser ses sommets et ses foyers.

6. Dans cette question, m décrit un cercle fixe (Ω) de centre ω, passant par A et B, distinct du cercle (C).

a. Déduire de l'étude du faisceau de droites (OA, Oω, Om, OM) que la droite mM passe par un point fixe. Déterminer l'ensemble des pôles de la droite mM par rapport à (ω).

b. On considère l'affinité orthogonale $\mathscr{A}$ d'axe OA et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Soit $m_1 = \mathscr{A}(m)$, $M_1 = \mathscr{A}(M)$.

Déterminer avec précision l'homologue (Ω_1) de (Ω) par $\mathscr{A}$.

Montrer que les tangentes en m et M à (ω) en m_1 et M_1 à (Ω_1) passent par un même point.