Baccalauréat C Toulouse juin 1973

EXERCICE 1

1. Déterminer les nombres complexes Z tels que : $Z^2 = -7+24\mathrm{i}$.
2. Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation :

$$z^2-(1-2\mathrm{i})z+1-7\mathrm{i}=0$$

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{x-1}{\mathrm{e}^x}$$

1. Étudier les variations de f et construire la courbe représentative (C) de cette fonction dans un plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 3 cm pour unité de longueur).
2. Montrer que l'on peut trouver deux constantes réelles a et b telles que la fonction F définie par :

$$F(x)=\frac{ax+b}{\mathrm{e}^x}$$

soit une primitive de f.
En déduire l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=1$, la courbe (C) et la droite d'équation $x=m$, m désignant un nombre réel supérieur à 1.
Quelle est la limite de cette aire lorsque m tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

On sait que l'ensemble F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'application constante d'image $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, l'application cosinus et l'application sinus sont notées respectivement e_1, e_2, e_3 ; le sous-espace vectoriel de F engendré par e_1, e_2 et e_3 est noté E.
Ainsi, E est l'ensemble des applications f pour lesquelles il existe un triplet $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ de nombres réels tel que :

$$f=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

ou encore, quel que soit t,

$$f(t)=a_1\frac{1}{\sqrt{2}}+a_2\cos t+a_3\sin t$$

1. Une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ est notée et définie par :

$$(f,\ g)\longmapsto f\perp g=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)d\,\mathrm{d}t$$

a. Démontrer que, lorsque i et j prennent respectivement toutes les valeurs 1, 2 et 3, on a :

$$\begin{aligned} e_i \perp e_j &= 0 \quad \text{pour } i \neq j \\ e_i \perp e_i &= 1 \end{aligned}$$

b. Si $f = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ et $g = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ sont deux éléments de E $(a_1,\ a_2,\ a_3\ b_1,\ b_2,\ b_3)$ sont donc des nombres réels), exprimer $f \perp g$ uniquement à l'aide des six nombres $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3)$.

c. En déduire que l'application $(f,\ g) \longmapsto f \perp g$ est un produit scalaire sur E et que, pour ce produit scalaire, $(e_1,\ e_2\ , e_3)$ est une base orthonormée.

Désormais E est rapporté à cette base.

2. **a.** L'application dérivée de f est notée f'. Démontrer que si f appartient à E, il en est de même de f' et exprimer les coordonnées de f' à l'aide des coordonnées $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ de f.

b. x étant un élément de $\mathbb{R}$ et g un élément de F, un nouvel élément de F est noté g_x et défini par :

$$\forall t, \quad g_x(t) = g(x - t)$$

Démontrer que si g appartient à E, il en est de même de g_x et exprimer les coordonnées de g_x dans la base $(e_1,\ e_2\ , e_3)$ à l'aide de celles de g, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, et à l'aide de x.

3. f et g étant éléments de E, un nouvel élément de F est noté $f \star g$ et défini par :

$$\forall x, \quad (f \star g)(x) = f \perp g_x$$

a. Démontrer que $f \star g$ appartient à E et exprimer ses coordonnées à l'aide de celles de f et de g.

b. L'application $(f,\ g) \longmapsto f \star g$ est donc une loi de composition interne de E. Démontrer que cette loi est commutative.

c. Démontrer que pour cette loi, E possède un élément neutre noté δ dont on calculera les coordonnées.

d. Trouver les éléments f de E qui ont un symétrique $\overline{f}$ pour la loi $\star$ et exprimer les coordonnées de $\overline{f}$ à l'aide de celles de f.

e. Démontrer qu'il existe un élément d de E tel que, pour tout f de E, $d \star f = r$ et calculer ses coordonnées.

4. ω étant un nombre réel non nul, f étant un élément de E, on se propose de rechercher les fonctions y de E vérifiant $y'' - \omega^2 y = f$ où y'' désigne la dérivée seconde de y.

En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer que cette équation est équivalente à une équation du type $h \star y = f$; expliciter les coordonnées de h. Montrer, sans calculer les coordonnées de y, que l'équation proposée admet une solution et une seule.