Baccalauréat C Toulouse juin 1980

EXERCICE 1

Pour tout $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{Z}^2$ on pose

$$f(x\,;\,y) = (4x+2y+12)^2 - 4(x+y+4)^2.$$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

1. $f(x\,;\,y) = 0$.
2. $f(x\,;\,y) = 4$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{\sqrt{1+x}}.$$

Le plan P est muni du repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier f et dresser le tableau complet des variations de f (la courbe représentative de f n'est pas demandée).
2. Pour tout x positif, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t$ que l'on notera $F(X)$; (On pourra utiliser une intégration par parties). Étudier $\displaystyle\lim_{+\infty} F$.
3. Soit $\begin{array}{llll} g: &]-10\,;\,\text{e}^2-1] & \to & \left]-\infty\,;\,\dfrac{2}{\text{e}}\right] \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$
   a. Tracer la courbe d'équation $y = g(x)$.
   b. Montrer que g est une bijection. En notant h son application réciproque, tracer la courbe d'équation $y = h(x)$.
   c. E est l'ensemble des points M de P de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que
   $$0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{\text{e}} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant h(x).$$
   Calculer l'aire de E.

PROBLÈME

P est un plan affine euclidien rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.
À tout point M de P de coordonnées $(x\,;\,y)$ on associe le nombre complexe $z = x+\text{i}y$ appelé affixe de M.

Partie A

1. Étant donné un complexe non nul $w = u+\text{i}v$, avec u et v réels, et un réel l, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\overline{w}z + w\overline{z} = l$.
2. Soit D une droite affine dont une équation est
   $$ax+by+c = 0$$
   avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$; $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
   Trouver un complexe non nul w et un réel l tels que D soit l'ensemble des points de P dont l'affixe z vérifie $\overline{w}z + w\overline{z} = l$.

Partie B

1. Étant donné un complexe w et un réel k, déterminer l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie

$$\overline{z}z - \overline{w}z - w\overline{z} + k = 0.$$

(on aura à discuter en fonction du signe de $|w|^2 - k$).

2. Soit C le cercle de centre le point de coordonnées $(a\,;\ b)$, de rayon R. Trouver un complexe w et un réel k tels que C soit l'ensemble des points de P dont l'affixe z vérifie

$$\overline{z}z - \overline{w}z - w\overline{z} + k = 0.$$

Partie C

On considère l'application f de P $-\{$O$\}$ dans P $-\{$O$\}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que 1

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}.$$

1. Montrer que pour tout point M de P $-\{$O$\}$, les points M et $M' = f(M)$ appartiennent a une même demi-droite d'origine O.
2. Montrer que f est involutive. Préciser l'ensemble des points M de P tels que $f(M) = M$ et donner ses éléments remarquables.
3. **a.** Soit D une droite ne contenant pas le point O. En utilisant les parties A et B, déterminer l'image de D par l'application f. Préciser la nature géométrique de cette image et donner ses éléments remarquables.

   b. Soit U une droite contenant O. Déterminer l'image de U $-\{$O$\}$ par f.
4. Soit C un cercle passant par O. Déterminer l'image de C $-\{$O$\}$ par f. Préciser la nature géométrique de cette image.

Partie D

Si M et N sont deux points quelconques de P, on rappelle que la distance MN de M et N est égale au module de la différence des affixes de M et de N.

1. Soit A et B deux points distincts de P $-\{O\}$ d'images respectives A$'$ et B$'$ par f. Exprimer A$'$B$'$ en fonction de AB, OA et OB.
2. Soit un cercle C passant par O et trois points R, S, T sur ce cercle tels que O, R, S et T soient deux à deux distincts et que le point d'intersection des droites (OS) et (RT) appartienne au segment [R, T].
   Montrer que

$$\text{OS}\cdot\text{RT} = \text{OR}\cdot\text{TS} + \text{OT}\cdot\text{RS}.$$

   (On pourra considérer l'image par f de C $-\{$O$\}$ et utiliser le fait qu'un point B appartient à un segment [A, C] si, et seulement si, AB + BC = AC.)
3. Soit trois points R, S, T du plan P tels que O, R, S, T soient distincts deux à deux et tels que

$$\text{OS}\cdot\text{RT} = \text{OR}\cdot\text{TS} + \text{OT}\cdot\text{RS}.$$

   Montrer que O, R, S, T sont sur un même cercle ou sur une même droite.