Baccalauréat C Toulouse septembre 1970

EXERCICE 1

Écrire la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
Le nombre 1 517 est-il premier ?
Quels sont les entiers naturels a et b vérifiant la relation $a^2 = b^2 + 1517$?

EXERCICE 2

Pour quelles valeurs de la variable réelle x la fonction

$$x \to \text{Log}\left(x^2 - 1\right) - \text{Log}\left(x^2 + 1\right)$$

est-elle définie ?
Étudier les variations de cette fonction ; construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

EXERCICE 3

Dans le plan euclidien orienté, on donne un cercle (C) de centre O et de rayon 1, deux points fixes A et B de (C) tels que $\overrightarrow{\text{OB}}$ soit directement perpendiculaire à $\overrightarrow{\text{OA}}$.
Soit A$'$ le point diamétralement opposé à A et B$'$ le point diamétralement opposé à B sur (C). On désigne par (C_1) le demi-cercle de diamètre AA$'$ qui contient B$'$. Si P est un point de (C_1), on appelle φ le représentant de la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OP}}\right)$ compris entre π et 2π $(\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.
On désigne par N le symétrique de A par rapport à la droite OP, par M le point défini par l'égalité $\overrightarrow{\text{NM}} = \overrightarrow{\text{OA}}$.

1. **a.** Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right)$ en fonction de φ. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{AN}}$ dans le système d'axes de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\text{OA}}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}$.
   En déduire que la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OP}}, \overrightarrow{\text{AN}}\right)$ a pour représentant $-\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Lorsque P décrit (C_1), M décrit un ensemble (Γ), que l'on précisera.
   c. La demi-droite d'origine O passant par M coupe (C) en S. Par quelle transformation simple peut-on obtenir S à partir de P ?
   En déduire que la droite BP est perpendiculaire à la droite AS.
   d. Soit Ou la droite bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.
   Montrer que la parallèle à Ou passant par P passe par un point fixe quand P décrit (C_1).
2. Le plan étant rapporté aux axes de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\text{OA}}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}$, un point de coordonnées a et b est l'image du nombre complexe $a + \text{i}b$.
   Quelle est l'image du nombre complexe $p = \cos\varphi + \text{i}\sin\varphi$?
   On considère l'équation

   $$(1) \qquad z^2 - 2pz + 1 = 0.$$

   a. On se propose de calculer les nombres complexes z_1 et z_2 racines de l'équation (1). Exprimer en fonction de φ le module et l'argument de $d = p^2 - 1$.
   En déduire les modules et les arguments des nombres complexes $z_1 - p$ et $z_2 - p$.

b. Quelles sont les images des nombres complexes p^2 et d ? Montrer que les points Q_1 et Q_2, images des nombres complexes $z_1 - p$ et $z_2 - p$, sont situés sur la droite Ou définie à la question 1 et retrouver leurs modules et arguments.

c. Montrer que les nombres complexes $z_1 - \mathrm{i}$ et $z_2 - \mathrm{i}$ ont le même argument.
Montrer que les nombres complexes $z_1 + \mathrm{i}$ et $z_2 + \mathrm{i}$ ont le même module.
En déduire une construction des points Z_1 et Z_2 images des nombres complexes z_1 et z_2.