Baccalauréat C Toulouse juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la courbe (E) d'équation $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ et les points A(1 ; 0) et B(0 ; 2).

1. Reconnaître (E) et en donner les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers, directrices). Tracer (E).
2. M étant un point quelconque de (E), montrer que l'isobarycentre M' des points A, B et M est l'image de M par une transformation que l'on précisera.
3. Quel est l'ensemble (F) des points M' quand M décrit (E).
   Préciser ses éléments caractéristiques. Tracer (F).
   N.B. : Toute solution, analytique ou non, sera acceptée.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère l'application S qui, au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = (1 + \text{i})z + 2.$$

1. Reconnaître cette application ; montrer qu'elle a un point invariant I.
   Donner une construction géométrique du point M' image de M par S.
   Quelle est la nature du triangle $(I,~M,~M')$?
2. Quel est l'ensemble C_1 des points M de P tels que
   $$\left\|\overrightarrow{\text{O}M}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{O}M'}\right\| ?$$
3. Quel est l'ensemble C_2 des points M de P tels que
   $$\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}M'} = 0 ?$$
4. Déduire des questions précédentes une construction géométrique des images des points d'intersection de C_1 et C_2.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

1. En étudiant le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que
   $$t \longmapsto t - \ln t - 1$$
   montrer que, pour tout réel t strictement positif on a $\ln t \leqslant t - 1$.
2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que
   $$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

a. Étudier le sens de variation de f, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b. Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $f_1(0) = 0$.
Montrer que f_1 est le prolongement par continuité de f en zéro.
Construire la représentation graphique de f_1 dans un repère orthonormé (unité de longueur : 2 cm). On précisera la demi-tangente au point d'abscisse zéro ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.

c. Dans cette question x est un réel fixé de l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
Calculer, en justifiant son existence, la limite de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad u_n = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x^2} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{x^n}.$$

Partie B

On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^{\star} =]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t - \ln t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de F. (On n'étudiera pas les limites de F dans cette question).

2. Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x. Quelle signification géométrique peut-on donner du réel $F(x)$?

3. Étude de la limite de F en zéro.
Démontrer que, pour x appartenant à $]0\,;\,1]$ on a

$$\frac{x}{x - \ln x} \leqslant x.$$

En déduire que, pour x appartenant à $]0\,;\,1]$ on a

$$\frac{x^2 - 1}{2} \leqslant F(x) \leqslant 0.$$

En déduire que $F(x)$ admet une limite λ comprise entre $-\dfrac{1}{2}$ et 0 quand x tend vers 0. (On ne cherchera pas à calculer λ).

4. Étude de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
Montrer que, pour tout x de $[1~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant 1$.
En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

5. On se propose d'encadrer la fonction F par deux fonctions, lorsque x est supérieur à 1.

a. Calculer $\displaystyle\int_1^x (1 + \ln t)\,\mathrm{d}t$ pour x appartenant à $\mathbb{R}_+^{\star}$.
Montrer que si t est supérieur à 1 alors

$$\frac{t}{t - \ln t} \leqslant 1 + \ln t.$$

En déduire que, pour x supérieur à 1, on a

$$F(x) \leqslant x \ln x.$$

b. Calculer $\displaystyle\int_1^x \left(1+\frac{\ln t}{t}\right)\mathrm{d}t$ pour x appartenant à $\mathbb{R}_+^\star$.
Montrer que, pour tout x supérieur à 1, on a

$$x+\frac{1}{2}(\ln x)^2-1 \leqslant F(x).$$

c. Écrire l'encadrement de $F(x)$ pour x supérieur à 1.

Partie C

Pour chaque réel i de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, prendre pour valeur approchée de $F(i)$, la moyenne arithmétique des deux valeurs qui encadrent $F(i)$. On note y_i cette valeur approchée, que l'on donnera avec deux chiffres après la virgule.
Présenter les résultats obtenus dans un tableau et placer, dans un repère orthonormé, les points M_i de coordonnées $\left(i\ ;\ y_i\right)$ avec i appartenant à $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.
Déterminer le point moyen du nuage et donner une équation de la droite d'ajustement en utilisant la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite dans le repère orthonormé.