

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Toulouse juin 1969 ☞

EXERCICE 1

Étant donné un entier naturel n , on considère les deux nombres a et b tels que

$$a = 2n^2 \quad \text{et} \quad b = n(2n + 1).$$

On désigne par d le PGCD de a et b , par m leur PPCM.

Montrer que l'on a

$$b - a = d \quad \text{et} \quad b^2 - a^2 = m - d^2.$$

EXERCICE 2

On donne deux cercles orthogonaux, (Γ) et (Γ') , sécants en A et B. Soit I un point de (Γ) , J un point de (Γ') , distincts de A et de B. On suppose, en outre, les trois points I, J et A, d'une part, I, J et B, d'autre part, non alignés.

Déterminer les inverses du cercle (Γ) et des cercles circonscrits aux triangles IJA et IJB dans l'inversion de pôle I qui laisse invariant le cercle (Γ') .

Déduire de ce qui précède l'orthogonalité des cercles circonscrits aux triangles IJA et IJB.

PROBLÈME

On considère, dans un repère cartésien xOy , la courbe (C) représentative de la fonction $y = x^3$.

- a.** Écrire l'équation de la tangente en un point M de (C) d'abscisse x . Si a désigne l'abscisse, différente de zéro, d'un point M_0 de (C) , appliquer le calcul précédent à la détermination de l'abscisse du point de contact, M_1 , de (C) avec la tangente à (C) contenant M_0 et distincte de la tangente à (C) en M_0 .

Peut-on donner une interprétation analogue dans le cas où $a = 0$?

- b.** On pose $x_0 = a$ $y_0 = a^3$? On note T l'application de (C) dans (C) qui, au point M_0 , fait correspondre le point M_1 défini ci-dessus et l'on définit de proche en proche le point M_n par les formules

$$M_1 = T(M_0), M_2 = T(M_1), \dots, M_n = T(M_{n-1}).$$

Si (x_n, y_n) sont les coordonnées de M_n calculer x_n en fonction de x_{n-1} et y_n en fonction de y_{n-1} .

En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de a et n .

- c.** Exprimer, en fonction de a et n , les coordonnées, x_n et y_n du barycentre, G_n , des points M_0, M_1, \dots, M_n affectés de coefficients égaux à 1.

Quelle est la position limite de G_n quand l'entier n augmente indéfiniment ?

- d.** Calculer le birapport des quatre droites $OM_n, OM_{n+1}, OM_{n+2}, OM_{n+3}$ en fonction de x_n et vérifier qu'il est indépendant de a et de n .

- a.** Montrer qu'une solution quelconque de l'équation différentielle

$$(1) \quad y' + y \text{Log} 2 = 0$$

(Log désignant le logarithme népérien)
est de la forme

$$y = \lambda e^{-x \text{Log} 2},$$

où λ est une constante.

On désigne par (γ_λ) la courbe représentative de la fonction

$$y = \lambda e^{-x \text{Log} 2}.$$

De même, une solution quelconque de l'équation différentielle

$$(2) \quad y' + 3y \text{Log} 2 = 0$$

est de la forme

$$y = \mu e^{-3x \text{Log} 2},$$

où μ est une constante.

On désigne par (γ_μ) la courbe représentative de la fonction

$$y = \mu e^{-3x \text{Log} 2},$$

- b.** Les nombres x_n et y_n étant ceux définis au 1, b pour $a = 1$, montrer que les points I_0 de coordonnées $(0 ; +1)$, I_1 de coordonnées $(+1 ; x_1)$, ..., I_n de coordonnées $(n ; x_n)$ appartiennent, pour tout entier naturel n , à l'une ou l'autre de deux courbes (γ_λ) .

Peut-on énoncer un résultat analogue pour les points J_0 de coordonnées $(0 ; +1)$, J_1 de coordonnées $(+1 ; y_1)$, ..., J_n de coordonnées $(n ; y_n)$?