# Baccalauréat C Toulouse juin 1974

**EXERCICE 1**

On considère l'application $f$ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels vers l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ définie par :
$f(n) = \overline{5^n}$.
$\left(\overline{5^n}\right.$ désignant la classe d'équivalence de $5^n \pmod 7\left.\right)$

1. Déterminer $f(n)$ pour $n$ appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Montrer que $f$ est périodique et a pour période 6.
3. Déterminer $f(n)$ suivant les valeurs de $n$.
4. En déduire, suivant les valeurs de $n$, le reste de la division par 7 du nombre $12\,192^n$.

**EXERCICE 2**

Dans le plan complexe orienté, muni du repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$orthonormé direct, on considère la transformation $T$ qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par :

$$z' = 2(1-\mathrm{i})\overline{z} + \frac{7}{2}\mathrm{i}.$$

($\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$).
Démontrer que $T$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie dont le centre $\omega$ appartient à l'axe $\Delta$ de la symétrie.
Déterminer $\Delta$, $\omega$, et le rapport de l'homothétie.

**PROBLÈME**

À tout entier naturel $n$, on associe le polynôme $P_n$ défini par :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

(On rappelle : $0! = 1$)
Soit $f_n$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f_0(x) & = & \mathrm{e}^x - 1 \\ f_n(x) & = & \mathrm{e}^x - P_n(x) \end{array}$$

1. Étudier et représenter graphiquement les fonctions $f_0$ et $f_1$.
2. **a.** Montrer que la fonction $F_n$ définie par : $F_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ est paire.
   Montrer que la fonction $G_n$ définie par : $G_n(x) = f_n(x) - f_n(-x)$ est impaire.
   
   **b.** Étudier et représenter graphiquement les fonctions $F_0$ et $G_0$.
   
   **c.** Démontrer que, quel que soit le réel positif $\lambda$, la restriction de $F_0$ à l'intervalle $[0~;~\lambda]$ est une bijection de $[0~;~\lambda]$ sur $[F_0(0)~:~F_0(\lambda)]$, et que la restriction de $G_0$ à tout intervalle $[a~;~b]$ est une bijection de $[a~;~b]$ sur $[G_0(a)~;~G_0(b)]$.
   
   **d.** Démontrer que la fonction réciproque de la restriction de $F_0$ à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :
   
   $$x \longmapsto \text{Log}\,\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$$
   
   et que la fonction réciproque de $G_0$ est définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par :
   
   $$x \longmapsto \text{Log}\,\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

3. **a.** Montrer que, pour tout $x$ réel : $f_n(x) = f'_{n+1}(x)$ et que : $f_n(0) = 0$.

**b.** Montrer :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) > 0 & \text{si} & x \neq 0 \\ f_2(x) > 0 & \text{si} & x > 0 \\ f_2(x) < 0 & \text{si} & x < 0 \end{array}$$

Plus généralement, discuter le signe de $f_n(x)$ en fonction du signe du réel non nul $x$ et de la parité de l'entier naturel $n$.

**c.** Montrer pour $x < 0$ : $\quad 1 + x < \mathrm{e}^x < 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

En déduire un encadrement de $\mathrm{e}^{-0,1}$.

Comment pourrait-on obtenir un encadrement plus précis ?