Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Toulouse

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 400.
2. Soit a et b deux entiers naturels strictement positifs, d leur plus grand commun diviseur. Trouver une condition nécessaire et suffisante liant les nombres

$$\frac{a}{d} \text{ et } \frac{b}{d} \text{ pour que } d \text{ soit égal à } a - b.$$

3. Trouver les paires d'entiers strictement positifs dont le plus grand commun diviseur est la différence des deux entiers et dont le plus petit commun multiple est 400.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$\left\{\begin{array}{lclll} f(x) & = & \mathrm{e}^x - x - 1 & \text{pour} & x < 0\\ f(x) & = & 0 & \text{pour} & 0 \leqslant x < 1\\ f(x) & = & \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} & \text{pour} & x \geqslant 1 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable pour $x = 0$. En est-il de même pour $x = 1$?
2. Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

PROBLÈME

Soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes. On note $z = x - \mathrm{i}y$ le conjugué du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

Partie A

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le rend euclidien en le munissant du produit scalaire défini dans la base (l, i) pour les deux vecteurs quelconques $z = x + \mathrm{i}y$ et $z = x' + \mathrm{i}y'$ par

$$< z,\ z' >= xx' + yy'.$$

Il est orienté par la base orthonormée directe (1, i).

1. Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2\mathrm{i}z - 2 = 0$$

Soit z_1 la solution dont la partie réelle est positive, z_2 l'autre solution. Calculer :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 \times z_2, \quad z_1^8, \quad \left(\overline{z_2}\right)^{10}$$

2. On considère l'endomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ déterminé par :

$$\varphi(1) = z_1, \qquad \varphi(\mathrm{i}) = z^2$$

Montrer que φ est le composé d'une homothétie vectorielle par une rotation vectorielle que l'on précisera.

3. On considère l'endomorphisme ψ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ déterminé par :

$$\psi(1) = z_1, \qquad \psi(\mathrm{i}) = z^2$$

Caractériser ψ comme composé de deux transformations simples.

Partie B

On associe à $\mathbb{C}$ le plan affine euclidien P muni de repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$: à tout point M de P de coordonnées $(x~;~y)$ est associé le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, appelé affixe de M.

1. Soit g l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point $g(M)$ d'affixe $-\overline{z}$. Caractériser g.
2. On considère l'application affine f de P dans P, qui au point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe $f(M)$ de coordonnées $(X~;~Y)$ où

$$\left\{\begin{array}{l c r}X &=& -x+y-1\\ Y &=& x+y\end{array}\right.$$

   Caractériser f, préciser ses éléments remarquables.
3. Étudier l'application affine $h = g \circ f$: nature, éléments remarquables.
   On vérifiera que, si M a pour coordonnées $(x~;~y)$, son image M' par h a pour coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& x-y+1\\ y' &=& x+y\end{array}\right.$$

4. On se propose d'étudier la nature de la courbe (C) de P admettant pour équation cartésienne dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$:

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0.$$

   Dans ce but,
   a. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe $\left(C'\right)$ image de (C) par h. $\left(C'\right)$ est une parabole dont on précisera le foyer F$'$, la directrice Δ' et le sommet S'.
   b. En déduire une définition géométrique de la courbe (C). Préciser ses éléments, la construire dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.