

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Toulouse ∞

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 400.
2. Soit a et b deux entiers naturels strictement positifs, d leur plus grand commun diviseur. Trouver une condition nécessaire et suffisante liant les nombres

$$\frac{a}{d} \text{ et } \frac{b}{d} \text{ pour que } d \text{ soit égal à } a - b.$$

3. Trouver les paires d'entiers strictement positifs dont le plus grand commun diviseur est la différence des deux entiers et dont le plus petit commun multiple est 400.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x - 1 & \text{pour } x < 0 \\ f(x) = 0 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{\text{Log } x}{x} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable pour $x = 0$. En est-il de même pour $x = 1$?
2. Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈME

Soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes. On note $\bar{z} = x - iy$ le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$.

Partie A

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le rend euclidien en le munissant du produit scalaire défini dans la base $(1, i)$ pour les deux vecteurs quelconques $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ par

$$\langle z, z' \rangle = xx' + yy'.$$

Il est orienté par la base orthonormée directe $(1, i)$.

1. Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2iz - 2 = 0$$

Soit z_1 la solution dont la partie réelle est positive, z_2 l'autre solution. Calculer :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 \times z_2, \quad z_1^8, \quad (\overline{z_2})^{10}$$

2. On considère l'endomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ déterminé par :

$$\varphi(1) = z_1, \quad \varphi(i) = z^2$$

Montrer que φ est le composé d'une homothétie vectorielle par une rotation vectorielle que l'on précisera.

3. On considère l'endomorphisme ψ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ déterminé par :

$$\psi(1) = z_1, \quad \psi(i) = z^2$$

Caractériser ψ comme composé de deux transformations simples.

Partie B

On associe à $\mathbb{C}$ le plan affine euclidien P muni de repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$: à tout point M de P de coordonnées $(x; y)$ est associé le nombre complexe $z = x + iy$, appelé affixe de M .

1. Soit g l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point $g(M)$ d'affixe $-\bar{z}$. Caractériser g .
2. On considère l'application affine f de P dans P , qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe $f(M)$ de coordonnées $(X; Y)$ où

$$\begin{cases} X &= -x + y - 1 \\ Y &= x + y \end{cases}$$

Caractériser f , préciser ses éléments remarquables.

3. Étudier l'application affine $h = g \circ f$: nature, éléments remarquables.

On vérifiera que, si M a pour coordonnées $(x; y)$, son image M' par h a pour coordonnées $(x'; y')$ avec

$$\begin{cases} x' &= x - y + 1 \\ y' &= x + y \end{cases}$$

4. On se propose d'étudier la nature de la courbe (C) de P admettant pour équation cartésienne dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0.$$

Dans ce but,

- a. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (C') image de (C) par h . (C') est une parabole dont on précisera le foyer F' , la directrice Δ' et le sommet S' .
- b. En déduire une définition géométrique de la courbe (C) . Préciser ses éléments, la construire dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.