∽ Baccalauréat C Toulouse juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5 929.
2. Trouver les couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels dont le P. G. C. D. et le P. P. C. M. sont les solutions de l'équation

$$x^2 - 91x + 588 = 0.$$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. Soit φ la fonction réelle de variable réelle, qui, à x, associe

$$\varphi(x) = x^2 + \text{Log}\, x$$

Déduire de l'étude de ses variations que cette fonction s'annule pour une seule valeur x_0 de la variable, comprise entre $\dfrac{1}{\text{e}}$ et 1. (On ne cherchera pas à calculer x_0)).

2. Soit f la fonction réelle de variable réelle, qui, à x, associe

$$f(x) = 1 - x + \frac{1 + \text{Log}\, x}{x}.$$

Étudier les variations de f. Montrer que la représentation graphique C de f dans un repère orthonormé d'axes Ox et Oy, admet deux asymptotes, dont l'une D n'est pas parallèle à Oy; préciser la position de C par rapport à D.
(On ne cherchera ni la valeur du maximum, ni les abscisses des points d'intersection avec Ox, ni le point d'inflexion).

3. Construire C.
4. Calculer l'aire de l'ensemble E des points $M(x\ ;\ y)$ définis dans le repère (Ox, Oy) par

$$\frac{1}{\text{e}} \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x + \frac{1 + \text{Log}\, x}{x}.$$

On utilisera les valeurs numériques $\dfrac{1}{\text{e}} \approx 0,368$; $\dfrac{1}{\text{e}^2} \approx 0,134$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel associé.

1. On considère l'ensemble E des points m de P dont les coordonnées (; y) vérifient l'équation

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Identifier E, déterminer ses foyers, les directrices associées et l'excentricité.

2. Soit s l'application affine de P dans P qui au point $M(X\ ;\ Y)$ associe le point $M'\left(X'\ ;\ Y'\right)$ défini par les formules

$$s\quad\left\{\begin{array}{lcl} X' &=& \dfrac{3}{5}X+\dfrac{8}{5}Y\\ Y' &=& \dfrac{2}{5}X-\dfrac{3}{5}Y\end{array}\right.$$

a. Démontrer que s est bijective et déterminer s^{-1} ; en déduire la nature de s et les éléments géométriques qui la caractérisent.

b. Démontrer que E est globalement invariante par s.

3. Soit g l'application affine de P dans P définie par :

$$g\quad\left\{\begin{array}{lcl} X' &=& \dfrac{3}{5}X-\dfrac{8}{5}Y\\ Y' &=& \dfrac{2}{5}X+\dfrac{3}{5}Y\end{array}\right.$$

a. u étant la symétrie orthogonale d'axe $x'\mathrm{O}x$, démontrer que $g = s\circ u$.

b. Établir que E est globalement invariante par g.

4. Étude de l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications affines f de P dans P laissant E globalement invariante.

a. Montrer que toute application f appartenant à $\mathcal{F}$ est bijective. En utilisant le fait qu'une ellipse admet un centre de symétrie unique, prouver que, pour toute application f appartenant à $\mathcal{F}$, $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

b. Montrer que l'application a définie par

$$a:\quad\left\{\begin{array}{lcl} X' &=& X\\ Y' &=& 2Y\end{array}\right.$$

transforme E en un cercle C; déterminer a^{-1}.

c. Prouver que $a\circ f\circ a^{-1}$ transforme C en C. Montrer que les transformations affines qui conservent C sont les isométries affines laissant O invariant. En déduire que :
$a\circ f\circ a^{-1}$ est de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' &=& X\cos\alpha+\epsilon Y\sin\alpha\\ Y' &=& X\sin\alpha-\epsilon Y\cos\alpha\end{array}\right.\qquad \text{où } \epsilon=\pm1$$

En déduire la forme générale des équations de f. Quelles sont les valeurs de α et de ϵ qui donnent les applications s et g ?