∽ Baccalauréat C Toulouse juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit un plan affine P, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
Dans P, on considère les n points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ dont les affixes dans ce repère sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(1) \qquad z^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N},\ n > 2).$$

On désigne par z_1 le nombre complexe $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

1. Exprimer en fonction de z_1 les n racines de l'équation (1).
   Déterminer l'isobarycentre des points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$.
   (On rappelle que l'isobarycentre d'un ensemble de points est le barycentre de ces points affectés de coefficients tous égaux).
2. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que

$$\left\| \overrightarrow{M\text{A}_1} + \overrightarrow{M\text{A}_2} + \cdots + \overrightarrow{M\text{A}_n} \right\| = n.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que

$$M\text{A}_1^2 + M\text{A}_2^2 + \cdots + M\text{A}_n^2 = 2n.$$

EXERCICE 2 **3 POINTS**

On considère l'ensemble Γ des points M d'un plan affine euclidien dont les coordonnées (x ; y) par rapport à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ satisfont à la relation :

$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1.$$

Démontrer que Γ est la réunion de deux coniques.
On dessinera ces deux coniques après avoir déterminé leurs axes, leurs sommets, leurs foyers et les asymptotes éventuelles.

PROBLÈME **14 POINTS**

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Partie A

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $\text{D} =]-1\,;\,+1[$.
   Démontrer que f est une fonction continue sur D.
   Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Étudier les variations de f.
   Démontrer que f est une bijection de D sur $\mathbb{R}$.
   On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f. Exprimer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour cela, on résoudra l'équation d'inconnue y, $x = f(y)$, x étant un réel donné.

3. Soit respectivement C et C' les courbes représentatives de f et f^{-1} par rapport à un même repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Écrire une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse $x = 0$.
Étudier la position de C par rapport à cette tangente : on pourra étudier les variations de la fonction φ : $\quad x \longmapsto f(x) - x \quad (x \in \text{D})$.
Tracer les courbes C et C' dans le plan rapporté à un repère orthonormé. (On prendra comme unité de longueur : 4 cm).

Partie B

1. Démontrer que, quels que soient les réels x et y appartenant à D, on a

$$\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1.$$

Ceci permet de définir dans D une loi de composition interne, notée $\star$, telle que :

$$\forall (x\,;\ y) \in \text{D}^2, \quad x \star y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Démontrer que $\forall (x\,;\ y) \in \text{D}^2$, $f(x \star y) = f(x) + f(y)$.
Quelle est la structure de (D, $\star$) ?

2. Soit a un réel quelconque de D. On pose
$a^{(1)} = a, \quad a^{(2)} = a \star a$ et pour tout n, entier naturel non nul $a^{(n+1)} = a^{(n)} \star a$.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad f\left[a^{(n)}\right] = nf(a)$.
En déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1+a^{(n)}}{1-a^{(n)}} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^n \qquad (1)$$

Démontrer que la suite terme général $a^{(n)}$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$, et étudier sa limite suivant les valeurs de a (On pourra utiliser la relation (1)).

Partie C

1. Soit g une fonction numérique de variable réelle, continue, dérivable, strictement monotone sur un intervalle ouvert J. On désigne par g' sa fonction dérivée sur J et par g^{-1} la fonction réciproque de g.
Soit Id la fonction définie par : $\forall x \in \text{J}, \quad \text{Id}(x) = x$.
Pourquoi la fonction g^{-1} admet-elle des primitives sur $g(\text{J})$?
Soit Γ une primitive de g^{-1}. Démontrer que $\Gamma \circ g$ est une primitive de $\text{Id}\cdot g'$.
En déduire que :

$$\forall (x\,;\ y) \in \text{J}^2 \qquad \int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(t)\,\text{d}t = \int_x^y t \cdot g'(t)\,\text{d}t.$$

2. f étant la fonction étudiée dans la partie A et x un nombre quelconque de D, calculer

$$\int_0^x t \cdot f'(t)\,\text{d}t.$$

Démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f^{-1}(t)\,\text{d}t = \log \dfrac{\text{e}^y + \text{e}^{-y}}{2}$.
On pourra utiliser la 1re question de la partie C.

3. Soit $\mathscr{A}$ le domaine plan, ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient les conditions

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

Soit $\mathscr{B}$ le domaine plan, ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient les conditions :

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|f^{-1}(x)\right| \leqslant |y| \leqslant |f(x)|.$$

a. Utiliser le dessin de A 3. pour hâchurer les domaines $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ainsi définis.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}\,\mathrm{d}t$.

c. En déduire, en cm^2, l'aire du domaine $\mathscr{A}$ et l'aire du domaine $\mathscr{B}$.