

∞ Baccalauréat C Toulouse juin 1981 ∞

EXERCICE 1

1. Calculer, pour $p = 0$, puis pour p entier strictement positif, le reste de la division de 10^p par 6.
2. Un entier naturel x est écrit $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ dans le système de numération de base dix.
Démontrer que 6 divise x si, et seulement si, 6 divise

$$4(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1) + a_0.$$

EXERCICE 2

P est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle F l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe le nombre complexe z , associe le point $F(M)$ d'affixe

$$z^2 + 2z + \frac{1}{2}.$$

medskip

1. L'application F est-elle une bijection de P dans P?
2. Déterminer les points de P invariants par F .
3. Soit D la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. M étant un point de D, calculer les coordonnées de $F(M)$ en fonction de l'ordonnée de M .
Écrire une équation cartésienne de l'image de D par F .
Reconnaître la courbe obtenue et la tracer.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble \mathcal{F} des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni des opérations addition et multiplication par un réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Partie A

Soit f_1 et f_2 les éléments de \mathcal{F} définis par

$$f_1(x) = e^x \cos \frac{\pi}{2}x \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^x \sin \frac{\pi}{2}x.$$

Soit E l'ensemble des applications f telles que $f = af_1 + bf_2$ (a, b) étant un élément quelconque de \mathbb{R}^2 .

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} et que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de E.
2. **a.** Démontrer que tout élément de E est dérivable sur \mathbb{R} et que son application dérivée est élément de E.
b. Soit d l'application de E dans E qui à tout élément de E associe son application dérivée. Démontrer que d est un endomorphisme de E. Écrire sa matrice dans la base \mathcal{B} .
c. Vérifier que d est une bijection de E sur E. Écrire, dans la base \mathcal{B} , la matrice de la bijection réciproque d^{-1} . En déduire une primitive sur \mathbb{R} d'un élément quelconque de E.

Partie B

1. Soit φ l'application de $E \times E$ dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (f, g) \in E \times E, \varphi(f, g) = \int_0^2 e^{-2x} f(x) g(x) dx.$$

- Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
 - Calculer $\varphi(f_1, f_1)$; $\varphi(f_2, f_2)$; $\varphi(f_1, f_2)$.
 - Écrire $\varphi(f, g)$ en fonction des coordonnées de f et g dans la base \mathcal{B} .
 - En déduire que φ est un produit scalaire dans E et que \mathcal{B} est, pour ce produit scalaire, une base orthonormée.
2. E muni de ce produit scalaire est un espace vectoriel euclidien que l'on oriente par la base orthonormée directe \mathcal{B} .

Démontrer que $d = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie vectorielle de rapport $\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ et r une rotation vectorielle. Montrer qu'une mesure en radians de l'angle de r appartient à $\left] -\frac{\pi}{2} ; 0 \right]$. On notera α cette mesure.

3. En déduire que, pour toute application f de coordonnées (a, b) dans la base \mathcal{B} , quel que soit x de \mathbb{R}

$$f'(x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} e^x \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right) \right].$$

Partie C

On se propose d'étudier l'élément f_1 de E , c'est-à-dire l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f_1(x) = e^x \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que

$$\|\vec{i}\| = 4 \|\vec{j}\|.$$

On appelle Γ et Γ' les courbes qui, dans ce repère, ont respectivement pour équations cartésiennes

$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = -e^x.$$

- Démontrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $-e^x \leq f_1(x) \leq e^x$.
 - Calculer les abscisses des points communs aux courbes Γ et \mathcal{C} .
Démontrer qu'en chacun de ces points les courbes Γ et \mathcal{C} ont la même tangente.
 - Faire la même étude pour les courbes Γ' et \mathcal{C} .
- Calculer les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite de repère $(O; \vec{i})$.
- Utiliser le résultat obtenu dans B 3., pour écrire, quel que soit x de \mathbb{R} ,

$$f_1(x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} e^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right).$$

Étudier f_1 sur l'intervalle $[-1; 3]$.

Tracer l'arc de la courbe \mathcal{C} correspondant à cet intervalle. (On pourra prendre -1 comme valeur approchée de α).