

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Toulouse ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= -\vec{i}; \\ f(\vec{j}) &= (\sin\theta) \cdot \vec{j} + (\cos\theta) \cdot \vec{k}; \\ f(\vec{k}) &= (-\cos\theta) \cdot \vec{j} + (\sin\theta) \cdot \vec{k}. \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0; 2\pi[$$

1. Démontrer que f est une isométrie vectorielle de E.
2. Démontrer l'existence d'une valeur unique de θ telle que f soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel; on précisera ce plan.

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation

$$z^2 - \frac{4}{\sin t} z + \frac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0.$$

z désigne l'inconnue, t désigne un paramètre réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

2. Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, on considère le point M mobile d'affixe

$$z = \frac{2}{\sin t} + 3i \cotg t, \quad t \text{ décrivant l'intervalle }]0; \pi[.$$

- a. Soit T la trajectoire du mobile; démontrer que T est une partie d'une courbe dont on précisera les éléments caractéristiques.
Préciser et construire T.
- b. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse \vec{V} à l'instant t et déterminer t pour que $\|\vec{V}\| = 3$.

PROBLÈME

12 points

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions réelles continues sur \mathbb{R} . On sait que $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et que tout élément de \mathcal{F} est intégrable sur tout intervalle borné de \mathbb{R} .

À toute fonction f , élément de \mathcal{F} , on associe la suite réelle définie sur \mathbb{N} par

$$U_0(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

et, pour $n \geq 1$,

$$U_n(f) = \int_{-1}^1 x^n f(x) dx.$$

Partie A

Dans cette partie on note f la fonction exponentielle de base e

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\mapsto f(x) = e^x, \end{aligned}$$

g la fonction, élément de \mathcal{F} , définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\mapsto g(x) = xe^x, \end{aligned}$$

et on désigne par \mathcal{E} l'ensemble des fonctions

$$h = af + bg \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calculer $U_0(f)$, puis $U_1(f)$ grâce à une intégration par parties.
2. Établir, pour $n \geq 1$, la relation $(-1)^n 3$.

$$U_{n+1}(f) = e + \frac{(-1)^n}{e} - (n+1)U_n(f).$$

3. Démontrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ et que $B = (f, g)$ est une base de \mathcal{E} .
4. Établir que, quelle que soit la fonction h élément de \mathcal{E} , il existe une fonction H telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \int_{-1}^1 h(x+t) dt.$$

Démontrer que H appartient à \mathcal{E} et que H est l'image de h par une application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E} dont on précisera la matrice dans la base B .

(Cette partie est indépendante des deux suivantes).

Partie B

Dans cette partie, on désigne par φ la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[&\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \varphi(y) = \operatorname{tg} y. \end{aligned}$$

1. Démontrer que φ admet une fonction réciproque notée Φ dont on donnera l'ensemble de définition (on ne cherchera pas à expliciter $\Phi(x)$).
2. Démontrer que Φ est dérivable sur \mathbb{R} et que sa fonction dérivée Φ' vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Montrer que Φ' appartient à \mathcal{F} et calculer $U_0(\Phi')$, $U_1(\Phi')$ et $U_2(\Phi')$.
4. **a.** Montrer que, si n est impair, $U_n(\Phi') = 0$.
b. Montrer que, si n est pair,

$$U_n(\Phi') \leq \frac{2}{n+1}$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\Phi')$.

Partie C

1. f étant un élément quelconque de \mathcal{F} , on considère la fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- a. Montrer que F est un élément de \mathcal{F} .
 - b. Montrer que $U_0(f) = F(1) - F(-1)$.
 - c. Calculer $U_n(F)$ en fonction de $F(1)$, de $F(-1)$ et de $U_{n+1}(f)$.
2. Soit Φ la fonction définie au B
- a. Montrer que, si n est pair, $U_n(\Phi) = 0$.
 - b. Calculer $U_1(\Phi)$ sans nouvelle intégration.
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1}(\Phi)$.