

## 🌀 Baccalauréat C Toulouse juin 1983 🌀

### EXERCICE 1

4 POINTS

$n$  étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs  $a$  et  $b$  définis par :

$$a = 3n^2 - 7n - 8 \quad ; \quad b = n - 2.$$

1. Montrer que  $\text{P.G.C.D.}(a, b) = \text{P.G.C.D.}(b, 10)$ .
2. Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles :  $\text{P.G.C.D.}(a, b) = 5$ .
3. Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
4. Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles le nombre  $\frac{a}{b}$  est un entier relatif.

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit  $\vec{E}$  un plan vectoriel de base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  on définit l'application linéaire  $f_{(a, b)}$  de  $\vec{E}$  vers lui-même dont la matrice relativement à la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  s'écrit :

$$M_{(a, b)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$ , l'application  $f_{(a, b)}$  est-elle bijective?  
**b.** Dans le cas où elle ne l'est pas, déterminer le noyau et l'image de  $f_{(a, b)}$ . Donner une base de chacun d'eux.  
**c.** Pour quels couples  $(a, b)$  ces deux espaces vectoriels sont-ils non supplémentaires?
2. Quelles sont les applications  $f_{(a, b)}$  involutives?  
Nature géométrique de  $f_{(0, -1)}$ . Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Quelles sont les applications  $f_{(a, b)}$  vérifiant :

$$f_{(a, b)} \circ f_{(a, b)} = f_{(a, b)} ?$$

Nature de  $f_{(0, 0)}$ . Préciser ses éléments caractéristiques.

### PROBLÈME

12 POINTS

On rappelle que l'ensemble  $F$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et que l'ensemble  $\mathcal{C}$  des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

#### Partie A

Soit  $E$  l'ensemble des applications

$$\begin{aligned} f_{a, b}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_{a, b}(x) = e^x(ax + b). \end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}$  et que  $(f_{0, 1}, f_{1, 0})$  est une base de  $E$ .

2. Montrer que la dérivée  $f'_{a,b}$  de  $f_{a,b}$  vérifie

$$f'_{a,b} = f_{a,b} + af_{0,1}.$$

En déduire :

- a. que  $f'_{a,b}$  appartient à  $E$ ;
- b. une expression de la dérivée  $n$ -ième  $f_{a,b}^{(n)}$  de  $f_{a,b}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ );
- c. une primitive de  $f_{a,b}$ .

### Partie B

1. a. Soit  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{C}$ . À tout élément  $f$  de  $\mathcal{C}$ , on associe l'élément  $g$  de  $F$  défini sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t) dt.$$

(On justifiera l'existence de  $g$ . Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .)

- b. On note  $U_\varphi$  l'application de  $\mathcal{C}$  dans  $F$  définie par :

$$U_\varphi(f) = g.$$

Montrer que  $U_\varphi$  est une application linéaire de  $\mathcal{C}$  dans  $F$ .

2. On suppose que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) &= \sqrt{x^2 + 1} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) &= xe^x. \end{aligned}$$

Montrer l'existence d'une application unique  $f$  de  $\mathcal{C}$  telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

3. On suppose que  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0$ ) et que  $g$  est une application dérivable telle que  $g'$  appartienne à  $\mathcal{C}$  et que  $g(0) = 0$ .  
Montrer l'existence d'une application  $f$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $U_\varphi(f) = g$ .

### Partie C

1. On suppose que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) &= \log(1 + x^2) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) &= \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Montrer l'existence d'une application  $f$  de  $\mathcal{C}$  telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

2. Soit  $f$  la fonction

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) &= \frac{x^2}{\log(1 + x^2)} \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

- a. Étudier les variations de  $f$ . Pour déterminer le signe de la dérivée  $f'$  de  $f$ , on mettra  $f'$  sous la forme

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2x}{[\log(1+x^2)]^2} \times \gamma(x)$$

et l'on précisera les variations de l'application  $\gamma$  pour en déduire le signe de  $\gamma(x)$  pour  $x > 0$ .

- b. Tracer la courbe  $\Gamma$  représentative de  $f$  dans le plan  $P$  rapporté au repère précédent. (On admettra que  $f$  est dérivable au point  $O$  et que  $f'(0) = 0$ .)

#### Partie D

$\varphi$  étant une application de  $\mathcal{C}$ , on note  $\Phi$  la primitive de  $\varphi$  qui s'annule pour  $x = 0$ .

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

On veut déterminer un couple  $(f, g)$  d'applications dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\begin{cases} U_\varphi(f) &= g \\ g - f &= \Phi. \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que  $f$  et  $f'$  vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x)[f(x) - 1] = f'(x). \quad (2)$$

2. On pose  $h(x) = e^{-\Phi(x)}(f(x) - 1)$ .  
Montrer que (2) est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 0.$$

et en déduire les solutions de (2).

3. En déduire une solution de (1).