

♻ Baccalauréat C Toulouse juin 1983 ♻

EXERCICE 1

4 POINTS

n étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs a et b définis par :

$$a = 3n^2 - 7n - 8 \quad ; \quad b = n - 2.$$

1. Montrer que $\text{P.G.C.D.}(a, b) = \text{P.G.C.D.}(b, 10)$.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $\text{P.G.C.D.}(a, b) = 5$.
3. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a et b sont premiers entre eux.
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre $\frac{a}{b}$ est un entier relatif.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit $\vec{E}$ un plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ on définit l'application linéaire $f_{(a, b)}$ de $\vec{E}$ vers lui-même dont la matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ s'écrit :

$$M_{(a, b)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

1.
 - a. Pour quelles valeurs de a et b , l'application $f_{(a, b)}$ est-elle bijective?
 - b. Dans le cas où elle ne l'est pas, déterminer le noyau et l'image de $f_{(a, b)}$. Donner une base de chacun d'eux.
 - c. Pour quels couples (a, b) ces deux espaces vectoriels sont-ils non supplémentaires?
2. Quelles sont les applications $f_{(a, b)}$ involutives?
Nature géométrique de $f_{(0, -1)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Quelles sont les applications $f_{(a, b)}$ vérifiant :

$$f_{(a, b)} \circ f_{(a, b)} = f_{(a, b)} ?$$

Nature de $f_{(0, 0)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME

12 POINTS

On rappelle que l'ensemble F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'ensemble $\mathcal{C}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de F .

Partie A

Soit E l'ensemble des applications

$$\begin{aligned} f_{a, b}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_{a, b}(x) = e^x(ax + b). \end{aligned}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ et que $(f_{0,1}, f_{1,0})$ est une base de E .
2. Montrer que la dérivée $f'_{a,b}$ de $f_{a,b}$ vérifie

$$f'_{a,b} = f_{a,b} + af_{0,1}.$$

En déduire :

- a. que $f'_{a,b}$ appartient à E ;
- b. une expression de la dérivée n -ième $f^{(n)}_{a,b}$ de $f_{a,b}$ ($n \in \mathbb{N}^*$);
- c. une primitive de $f_{a,b}$.

Partie B

1. a. Soit φ un élément de $\mathcal{C}$. À tout élément f de $\mathcal{C}$, on associe l'élément g de F défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t) dt.$$

(On justifiera l'existence de g). Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- b. On note U_φ l'application de $\mathcal{C}$ dans F définie par :

$$U_\varphi(f) = g.$$

Montrer que U_φ est une application linéaire de $\mathcal{C}$ dans F .

2. On suppose que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) &= \sqrt{x^2 + 1} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) &= xe^x. \end{aligned}$$

Montrer l'existence d'une application unique f de $\mathcal{C}$ telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

3. On suppose que φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0$) et que g est une application dérivable telle que g' appartienne à $\mathcal{C}$ et que $g(0) = 0$.

Montrer l'existence d'une application f de $\mathcal{C}$ telle que $U_\varphi(f) = g$.

Partie C

1. On suppose que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) &= \log(1 + x^2) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) &= \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Montrer l'existence d'une application f de $\mathcal{C}$ telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

2. Soit f la fonction

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) &= \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \\ f(0) &= 1\end{aligned}$$

- a. Étudier les variations de f . Pour déterminer le signe de la dérivée f' de f , on mettra sous la forme

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2x}{[\ln(1+x^2)]^2} \times \gamma(x)$$

et l'on précisera les variations de l'application γ pour en déduire le signe de $\gamma(x)$ pour $x > 0$.

- b. Tracer la courbe Γ représentative de f dans le plan P rapporté au repère précédent. (On admettra que f est dérivable au point O et que $f'(0) = 0$.)

Partie D

φ étant une application de $\mathcal{C}$, on note Φ la primitive de φ qui s'annule pour $x = 0$.

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

On veut déterminer un couple (f, g) d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} U_\varphi(f) &= g \\ g - f &= \Phi. \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que f et f' vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x)[f(x) - 1] = f'(x). \quad (2)$$

2. On pose $h(x) = e^{-\Phi(x)}(f(x) - 1)$.

Montrer que (2) est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0.$$

et en déduire les solutions de (2).

3. En déduire une solution de (1).